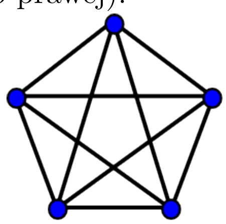
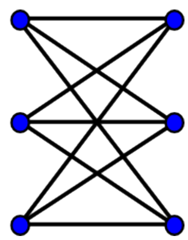
G. Plebanek | *Kombinatoryka* | nr 9 (29.04)

Grafy planarne

Uwaga: Zadania pochodzą częściowo ze zbioru Ś. Gala. Inne dowody wzoru Eulera (i wskazówki do niektórych zadań) można znaleźć na stronie przypiętej do zad. 1.

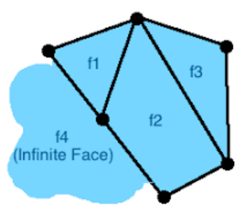
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Mówimy, że G jest *grafem planarnym* jeżeli można go zrealizować na płaszczyźnie w tym sensie, że krawędzie przecinają się tylko w wierzchołkach. Aby dostrzec, jaki jest problem warto próbować narysować graf K_5, graf o 5 wierzchołkach i wszystkich 10 krawędziach (na rysunku po lewej). Podobnie nie jest planarny graf $K_{3,3}$ (po prawej):





Powyższy rysunek **nie jest** realizacją na płaszczyźnie, krawędzie przecinają sie w 'nielegalnych' miejscach.

Jeżeli graf $G(V, E)$ jest planarny to definiuje **ściany** (po angielsku *faces* bądź *regions*); poniższy graf ma 4 ściany



— zawsze pamiętajmy o nieograniczonej części płaszczyzny, która też jest ścianą. Youtube oferuje całe wykłady o grafach planarnych; może warto obejrzeć ten krótki film. (tutaj wyjaśnione jest rozróżnienie pomiędzy *planar* (dający się narysować) i *plane* (narysowanym) grafem. Patrz też o wzorze Eulera.

Niech F będzie zbiorem ścian planarnego grafu $G = (V, E)$ spójnego. Następujące równanie nazywamy wzorem Eulera

$$(\mathbf{WE}) \quad |V| - |E| + |F| = 2.$$

Poniżej rozważamy tylko grafy spójne $G = (V, E)$ i F zawsze oznacza zbiór ścian grafu.

1. Udowodnić WE na różne sposoby, na przykład według poniższy sugestii; Na tej stronie wskazano 20 dowodów.

(a) Indukcja po $|F|$. Zauważyć najpierw, że graf o jednej ścianie nie ma cykli; wtedy $|E| = |V| - 1$.

(b) Indukcja po $|V|$.

(c) Indukcja po $|E|$.

(d) Załóżmy, że G ma krawędzie będące odcinkami. Policz sumę kątów na dwa sposoby, sumując po ścianach i po wierzchołkach.

2. Udowodnić **wzór Picka**: Niech P będzie wielokątem o całkowitych współrzędnych na płaszczyźnie. Wtedy pole P jest równe

$$|(\mathbb{Z}^2 \cap P)| - |(\mathbb{Z}^2 \cap \partial P)|/2 - 1.$$

Tutaj ∂P oznacza brzeg wielokąta. Wzór oznacza, że pole takiej figury można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich punktów kratowych w figurze połowę liczby punktów leżących na brzegu (i odejmując 1).

WSKAZÓWKA: Rozważyć najprostsze trójkąty tego typu. Do figury spełniajacej wzór Picka dodać nowy trójkąt i zbadać zachowanie się wyrażenia.

3. Załóżmy, że graf planarny ma krawędzie będące odcinkami i wierzchołki o wymiernych współrzędnych. Obliczyć pole dopełnienia zewnętrznego obszaru na dwa sposoby i wywnioskować stąd formułę Eulera.

4. Załóżmy, że w grafie planarnym (V, E) istnieje droga Eulera $\{v_i\}_{i=0}^{|E|}$. Znajdź bijekcję, między $\{i : \exists_{j<i} v_i = v_j\}$ a niezewnętrznymi ścianami. Wywnioskuj stąd formułę Eulera.

5. Dla dowolnego wielościanu wypukłego wielkość

$$\text{liczba wierzchołków} - \text{liczba krawędzi} + \text{liczba ścian}$$

jest stała i wynosi 2. Dlaczego?

6. Udowodnić, że jeżeli każda ściana grafu planarnego $G = (V, E)$ jest ograniczona co najmniej trzema krawędziami to $2|E| \geqslant 3|F|$.

7. Udowodnić, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.[1]

WSKAZÓWKA: Dokonać bilansu ścian, wierzchołków i krawędzi przy potencjalnym przedstawieniu grafu na płaszczyźnie.

8. Pokaż, że każdy graf planarny zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej pięć.

WSKAZÓWKA: Rozumując nie wprost, zliczyć krawędzie 'po wierzchołkach'.

9. Udowodnić **Twierdzenie o pięciu barwach**: *Wierzchołki dowolnego grafu planarnego można pokolorować (co najwyżej) pięcioma kolorami, tak aby każde dwa sąsiadujące wierzchołki miały różne kolory.*

WSKAZÓWKA: Załóż indukcyjnie, że po usunięciu wierzchołka stopnia co najwyżej pięć graf można pokolorować. Nawiasem mówiąc twierdzenie jest prawdziwe dla **czterech barw**. Jeżeli umiesz to pokazać to światowy rozgłos zapewniony z powodów opisanych tutaj.

[1] Twierdzenie Kuratowskiego orzeka, że każdy nieplanarny graf zawiera jeden z tych grafów.