1. Liczby Stirlinga

Ustalmy n i $1 \leqslant k \leqslant n$.

(1) **Liczba Stirlinga pierwszego rodzaju** $\left[{n \atop k}\right]$, czytaj k cykli z n, definiujemy jako liczbę tych permutacji zbioru n-elementowego, które składają się z k cykli. Obrazowo rzecz ujmując, jest to liczba sposobów wykonania k naszyjników z n różnych koralików.

(2) **Liczba Stirlinga drugiego rodzaju** $\left\{{n \atop k}\right\}$, czytaj k części z n, definiujemy jako liczbę podziałów zbioru n elementowego na k niepustych części.

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju pojawiają sie tylko na liście zadań. Poniżej przyjrzymy się bliżej tym rodzaju drugiego.

Twierdzenie 1.1. *Dla* $1 \leqslant k \leqslant n$ *zachodzi wzór*

$$\left\{{n \atop k}\right\} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}.$$

Dowód. Prosty dowód kombinatoryczny: Wyróżniamy jeden element a w zborze n-elementowym A. Aby utworzyć podział A na k części można najpierw podzielić $A \setminus \{a\}$ na k części i do jednej z nich dołączyć a — to daje pierwszy składnik po prawej stronie. Drugi składnik oblicza ilość podziału $A \setminus \{a\}$ na $k-1$ części. Każdy taki podział wraz z $\{a\}$ daje podział A na k części. Zauważmy, że pierwszy sposób daje tylko podziały niezawierające $\{a\}$; stąd dodawanie. $\square$

Zauważmy, że $\left\{{n \atop 1}\right\} = 1 = \left\{{n \atop n}\right\}$ (z samej definicji); $\left\{{3 \atop 2}\right\} = 2\left\{{2 \atop 2}\right\} + \left\{{2 \atop 1}\right\} = 3$, $\left\{{4 \atop 2}\right\} = 2\left\{{3 \atop 2}\right\} + \left\{{3 \atop 1}\right\} = 7$ (z rekurencji) itd. Patrz też
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_Stirlinga`

2. Liczby Stirlinga i tablice różnicowe

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju pojawiają się przy zupełnie innym, analitycznym, zagadnieniu. Oznaczmy

$$x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1);$$

jest to tak zwana *potęga krocząca.*

Twierdzenie 2.1. *Dla* $1 \leqslant k \leqslant n$ *zachodzi wzór*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k) + k \cdot x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1) = x^{\underline{k}}(x-k+k) = x \cdot x^{\underline{k}}. \tag{2.1}$$

Ponadto, łatwo zauważyć (patrz Uwaga 2.8), że istnieją pewne współczynniki $S(n,k)$, takie że

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}. \tag{2.2}$$

Pozostaje sprawdzić, że $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$. Mamy

$$x^n = x \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot x \cdot x^{\underline{k}} =$$

uwzględniając 2.1,

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot (x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}}) = \sum_{k=1}^{n} \left(kS(n-1,k) + S(n-1,k-1) \right) x^{\underline{k}};$$

w ostatniej równości uporządkowaliśmy wyrazy według potęg kroczących. Porównując współczynniki w tym ostatnim przedstawieniu oraz w 2.2, orzymujemy

$$S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1);$$

oznacza to, że liczby $S(n,k)$ spełniają rekurencję Stirlinga. Łatwo sprawdzić, że $S(1,1) = 1 = \left\{ {1 \atop 1} \right\}$; stąd $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ dla wszystkich naturalnych n i $1 \leqslant k \leqslant n$. $\square$

Przypomnijmy, że uogólniony symbol Newtona został zdefiniowany jako

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

Stosując Twierdzenie 2.1 mamy więc

Wniosek 2.2. *Dla każdego n zchodzi wzór*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{x}{k}.$$

Zobaczymy poniżej, do czego taki wzór może się przydać, ale najpierw wspomnimy o prostszej metodzie znajdowania wspólczynników przedstawienia wielomianu $p(x)$ względem bazy złożonej z wielomianów postaci $\binom{x}{k}$.

Pod pojęciem **tablicy różnicowej** funkcji f rozumiemy następującą macierz

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(0) & & f(1) & & f(2) & & f(3) & \ldots \\
& \Delta f(0) & & \Delta f(1) & & \Delta f(2) & & \ldots \\
& & \Delta^2 f(0) & & \Delta^2 f(1) & & \ldots & \\
& & & \ldots & & & &
\end{array}$$

Tutaj $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$ itd. Tablica jest potencjalnie nieskończona w prawo i w dół. Każdy wyraz w wierszu pierwszym i następnych jest po prostu różnicą wyrazów stojących ponad nim. Obliczanie tablicy jest proste.

Przykład 2.3. Niech $f(x) = x^2 + x + 1$. Tablica różnicowa tej funkcji ma taki początek:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 3 & & 7 & & 13 & & 21 \\
& 2 & & 4 & & 6 & & 8 & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & \\
& & & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

W tablicy różnicowej wyróżniamy *lewą dolną krawędź* (w przykładzie 1,2,2,0,...) oraz *wiersz zerowy* (w przykładzie 1,3,7,13,21,...), w którym są wartości w kolejnych liczbach całkowitych nieujemnych.

Lemat 2.4. *(a) Tablica różnicowa wielomianu stopnia n ma $n+1$ wiersz (i wszystkie następne) tożsamościowo równy zeru.*
(b) Tablica różnicowa jest jednoznacznie wyznaczona przez swoją lewą dolną krawędź.
(c) Tablica różnicowa $f+g$ jest sumą tablicy różnicowej funkcji f i tablicy funkcji g.

Dowód. Jeżeli $p(x)$ jest wielomianem stopnia 0 to wiersz zerowy jest stały, a wiersz pierwszy i następne oczywiście znikają. Jeżeli $p(x)$ ma stopnień $n > 0$ to $\Delta p(x)$, jak łatwo sprawdzić, jest wielomianem stopnia $n-1$. Stąd (?!) (a) wynika indukcyjnie.

(b) jest dość oczywiste: proszę zasłonić w przykładzie 2.2 wszystko oprócz lewej dolnej krawędzi i *zgadnąć* pozostałe wartości.

(c) Wynika po prostu z faktu że $\Delta(f(x) + g(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$. □

Lemat 2.5. *Lewa dolna krawędź tablicy różnicowej wielomianu $p(x) = \binom{x}{k}$ jest postaci $0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ (1 w k-tym wierszu).*

Dowód. Zauważmy, że $p(0) = p(1) = \ldots = p(k-1) = 0$ oraz $p(k) = 1$. W kolejnych wierszach ta 1 wędruje po skosie w dół. □

Twierdzenie 2.6. *Jeżeli wielomian $p(x)$ stopnia n ma tablicę różnicową o lewej dolnej krawędzie postaci $c_0, c_1, \ldots, c_n$ to*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \binom{x}{k}.$$

Dowód. Z lematów powyżej wynika, że funkcja po prawej stronie wzoru ma tablicę różnicową taką samą jak $p(x)$. Są to więc wielomiany, mające te same wartości w liczbach $0, 1, 2, \ldots$. Takie wielomiany są identyczne. □

Możemy teraz podać pewne zastosowanie, nawiązujące do zadań z listy 3.

Przykład 2.7. Znajdziemy wzór na $S(m) = 1^4 + 2^4 + \ldots + m^4$. Rozważamy wielomian $p(x) = x^4$. Tworzymy jego tablicę różnicową i czytamy lewą dolną krawedź; proszę sprawdzić, że jest to $0, 1, 14, 36, 24$ (dalej nie warto liczyć, prawda?). Otrzymujemy przedstawienie

$$x^4 = \binom{x}{1} + 14 \cdot \binom{x}{2} + 36 \cdot \binom{x}{3} + 24 \cdot \binom{x}{4}.$$

Korzystając ze wzoru (który nietrudno sprawdzić przez indukcję, patrz też Lista 3/Zadanie 11)

$$\sum_{k=p}^{m} \binom{k}{p} = \binom{m+1}{p+1},$$

otrzymujemy

$$S(m) = \binom{m+1}{2} + 14 \cdot \binom{m+1}{3} + 36 \cdot \binom{m+1}{4} + 24 \cdot \binom{m+1}{5}.$$

Uwaga 2.8. Zbiór $P(n)$ wielomianów $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ stopnia $\leqslant n$ jest $(n+1)$ wymiarową przestrzenią liniową. Jeśli w tej przestrzeni wskażemy dowolny układ $n+1$ liniowo niezależnych wielomianów to każdy element z $P(n)$ jest ich kombinacją liniową. Przykładem jest baza złożona z wielomianów $\binom{x}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Liniowa niezależność jest łatwa do sprawdzenia: niech

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \binom{x}{k} = 0.$$

Wstawiając $x = 0$ otrzymujemy $c_0 = 0$, wstawiając $x = 1$ mamy $c_1 = 0$ itd.