7. Początki teorii grafów

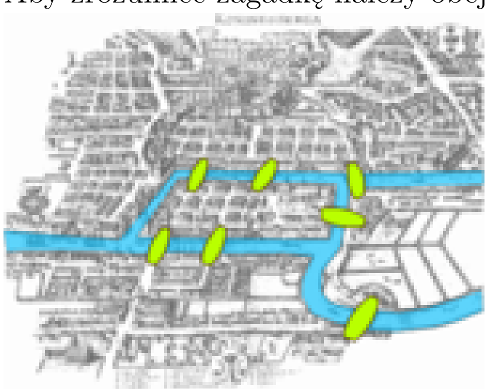
W Królewcu (w Prusach) jest wyspa zwana Kneiphof. . .

napisał Euler w swojej pracy z 1736, aby następnie odpowiedzieć na pytanie, czy można wyjść z domu, przejść wszystkimi mostami nad Pregołą, każdym przechodząc tylko raz i do tego domu powrócić. Zacznijmy od rzeczy najprostszych. Gdzie leży owo miasto i co Euler tam robił?

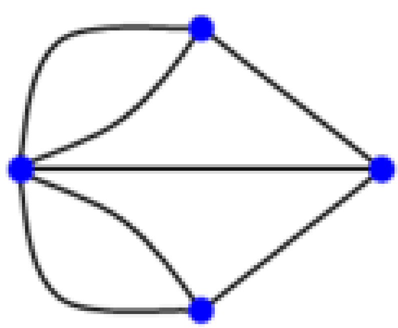
Królewiec: polska nazwa miasta, noszącego obecnie nazwę Kaliningrad, a wcześnie Königsberg, patrz Wiki . Miasto miało ciekawą historię; niestety obecnie nosi imię zbrodniarza z czasów stalinowskich.

Euler: Leonard Euler (przybliżona wymowa [Ojler]) — gigant matematyki XVIII wieku był Szwajcarem, ale przez większość swojego życia przebywał w Rosji; przeczytaj o geniuszu w w Wikipedii.

Aby zrozumieć zagadkę należy obejrzeć mapę (kopia z Wiki; patrz też tutaj)



Zagadka jest prosta, jeśli zrozumiemy, że należy wyeliminować z rysunku zbędne elementy i narysować taki schemat



Każdy kawałek lądu został ściśniety do punktu (poruszanie się po wyspie lub po jednym z brzegów nie jest istotne), a punkty połączono krawędziami, aby zaznaczyć mosty (kształt krawędzi też nie jest istotny). I tak powstał pierwszy w historii matematyki **graf**. Jeśli nie znamy odpowiedzi na pytanie o spacer wszystkimi mostami to warto samemu wymyślić, dlaczego nie można powyższego grafu narysować 'bez odrywania ołówka od papieru' (albo przeczytać twierdzenie poniżej).

Graf (chwilowo rozważamy wyłącznie tak zwane grafy nieskierowane) to jest bardzo prosta struktura matematyczna; aby zdefiniować graf $G = (V, E)$ wymieniamy po pierwsze zbiór wierzchołków V (po angielsku *vertices* lub *nodes*) oraz zbiór krawędzi *edges*), czyli pewny zbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru V. Jeżeli zaznaczymy na płaszczyźnie punkty odpowiadające elementom z V to fakt, że dla pewnych $a, b \in V$ zbiór E zawiera parę $\{a, b\}$ można zaznaczyć łącząc a i b kreską. Grafy skończone dużo przyjemniej oglądać na takim rysunku niż wyliczać ręcznie zbiór krawędzi.

Tak przynajmniej definiujemy grafy proste. Aby nawiązać do grafu Eulera powyżej zauważmy, że z lewego wierzchołka prowadzą dwie krawędzie do wierzchołka górnego (do dolnego też). Oznacza to, że ten graf nie jest grafem prostym (dla którego E jest po prostu zbiorem), a raczej jest multigrafem — zbiór jego krawędzi jest zbiorem z powtórzeniami. Jeżeli oznaczymy $V = \{a, b, c, d\}$ (od lewego wierzołka, zgodnie z ruchem zegara) to mozemy napisać

$$E = \{2 \cdot \{a, b\}, 2 \cdot \{a, d\}, 1 \cdot \{a, c\}, 1 \cdot \{b, c\}, 1 \cdot \{d, c\}\}.$$

Definicja 7.1. Stopień wierzchołka $x \in V$ w grafie $G = (V, E)$ definiujemy jako

$$\deg(x) = |\{y \in V \setminus \{x\} : \{x, y\} \in E\}|.$$

Jeżeli $G = (V, E)$ jest multigrafem to przy liczeniu $\deg(x)$ dodajemy do siebie krotności, z jakimi wszystkie krawędzie postaci $\{x, y\}$ występują w zbiorze z powtórzeniami E.

Najprościej mówiąc $\deg(x)$ to liczba krawędzi prowadzących do wierzchołka x. Zauważmy, że $\deg(x)$ może być równe 0.

Definicja 7.2. Droga (ścieżka) w grafie $G = (V, E)$ to ciąg (niekoniecznie różnych) wierzchołków $x_0, x_1, \ldots, x_n \in V$, taki że $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeżeli $x_0 = x_n$ to drogę nazywamy cyklem.

Graf nazywamy **spójnym** jeżeli każde dwa różne jego wierzchołki można połączyć drogą w tym grafie.

Na bazie problemu mostów królewieckich powstała następująca terminologia. Graf jest *eulerowski* jeżeli w tym grafie istnieje cykl Eulera, to jest taki cykl, który zawiera wszystkie krawędzie grafu. Dokładniej, jeżeli graf jest prosty to każda krawędź w cyklu Eulera występuje dokładnie raz. Jeżeli jest to multigraf, to każda krawędź występuje w cyklu Eulera tyle razy, ile wynosi jej krotność w zbiorze E. Pierwsze twierdzenie teorii grafów przedstawia się następująco.

Twierdzenie 7.3 (Euler)**.** *Spójny multigraf posiada cykl Eulera wtedy i tylko wtedy gdy stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą.*

Dowód. Konieczność warunku jest prawie oczywista: jeżeli istnieje cykl Eulera to musi on 'wejść' do danego wierzchołka tyle razy, ile z niego 'wychodzi'.

Dla sprawdzenia dostateczności załóżmy chwilowo, że graf jest prosty (tylko po to, aby się łatwiej wysłowić). Zauważmy, że graf o parzystych stopniach wierzchołków ma następującą własność:

Teza. *Każda krawędź zawiera się w pewnym cyklu.*

W oparciu o Tezę możemy rozumować na przykład tak:

(A) Rozważyć najdłuższy cykl w grafie i sprawdzić, że jest on cyklem Eulera.

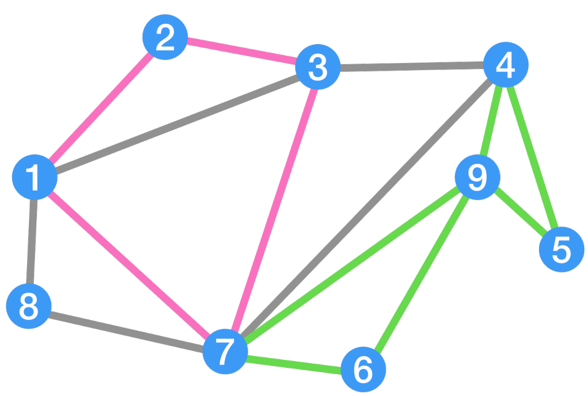
(B) Rozumować indukcyjnie: rozważyć pewien cykl C w grafie i usunąć jego krawędzie. Pozostanie graf o parzystych stopniach wierzchołków, ale niekoniecznie spójny. W każdej składowej spójności istnieje cykl Eulera. Należy je wszystkie połączyć za pomocą C w jeden cykl.

Mozliwość modyfikacji tego rozumowania dla multigrafu to zadanie dla czytelnika. □

W tym miejscu zaznaczmy, że powyższe dowody są trochę niekonstruktywne, ale istnieją algorytmy znajdujące cykl Eulera w grafie; najstarszy to algorytm Fleury'ego, patrz: tutaj lub tutaj

Wniosek 7.4. *Spójny multigraf posiada drogę Eulera (przechodzącą każdą krawędź dokładnie raz) wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wierzchołki w grafie mają stopień parzysty lub istnieją dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.*

Dowód. Rozważmy $G = (V, E)$ i wierzchołki $x \neq y$ ze zbioru V stopnia nieparzystego. Dorysujmy dodatkową krawędź pomiędzy x i y. Formalnie: definiujemy $G' = (V, E')$, gdzie E' powstaje z E przez zwiększenie krotności $\{x, y\}$ o jeden (krawędź ta pojawia się, jeśli jej wcześniej nie było). Nowy graf ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego, więc na mocy twierdzenia Eulera 7.3 w G' istnieje cykl Eulera. Wystarczy teraz zauważyć, że usunięcie dodatkowej krawędzi z tego cyklu definiuje drogę Eulera w wyjściowym grafie G. (Warto w tym miejscu zrobić orientacyjny rysunek lub poćwiczyć na Rysunku 7.5, przyjmując na przykład, że przedstawia on graf G', a w G nie ma krawędzi $\{4, 9\}$.) □



Przykład 7.5.

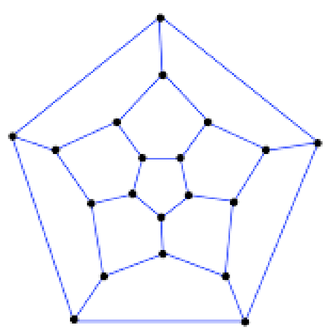
Następny istotny rozdział rozdział w historii grafów dzieje się dopiero w wieku XIX. Aby wypełnić lukę, popuśćmy wodze fantazji — jeżeli poniższa historia nie jest do końca prawdziwa, to powinna sie wydarzyć.

Otóż niejaki Bill Hamil, człek podejrzanej konduity, acz bardzo bystry, napisał do Eulera list ze skargą, że w słynnym artykule Eulera nie ma rozwiązania **jego** problemu. Bill, żołnierz-najmita, w każdym mieście, w którym przebywał, zaznaczał na swojej mapce wszystkie piwiarnie oraz ścieżki między nimi i nieraz się głowił, jak wyjść z garnizonu, zakosztować trunku w każdej knajpie i bezpiecznie wrócić (chwiejnym krokiem) na nocleg. A że jego zasady były niezłomne, nie pozwalał sobie na dwukrotne odwiedziny w żadnej piwiarni.

Eulera problem zaciekawił i zaczął zastanawiać się, jak scharakteryzować grafy *Hamila*, posiadające cykl odwiedzający każdy wierzchołek dokładnie raz (rzecz jasna poza pierwszym, który jest jednocześnie ostatni). Być może Leonard spędził wiele bezsennych nocy, aby zadowolić dociekliwość piwosza, ale rozwiązania, dość sfrustrowany nie znalazł (matematyka może sfrustrować nawet geniusza). Eulerowi na pocieszenie wypada powiedzieć, że nikt tego problemu do dzisiaj nie rozwiązał!

Historia powyższa uległa zapomnieniu i problem został wprowadzony do matematyki przez Sir Williama Hamiltona w wieku XIX. Dlatego mówimy o cyklach Hamiltona i grafach hamiltonowskich (a Bill Hamil przepadł bez wieści).

Przykład 7.6. Spróbujmy znaleźć cykl Hamiltona w takim grafie:



Rozstrzygnięcie, czy dany graf jest hamiltonowski i znalezienie odpowiedniego cyklu to ważne problemy z teoretycznych podstaw informatyki; studenci nieznający jeszcze hasła *problem NP-zupełny* na pewno jeszcze o tym magicznym terminie usłyszą.

Istnieje wiele wyników częściowych, rozwiązujących zagadnienie Hamiltona dla pewnych specjalnych grafów. Poniżej twierdzenie Ore z 1960 roku.

Twierdzenie 7.7. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem (prostym, a nie multigrafem), takim że $n = |V| \geqslant 3$. Załóżmy, że*

$$\text{(Ore)} \qquad \deg(x) + \deg(y) \geqslant n,$$

dla dowolnej pary różnych $x, y \in V$. Wtedy G posiada cykl Hamiltona.

Dowód. Zauważmy, że w twierdzeniu nie ma założenia o spójności; spójność jest konsekwenją warunku Ore: Przypuszczając, że V jest sumą dwóch rozłącznych niepustych zbiorów

A, B, takich że nie ma krawędzi pomiędzy wierzchołkami z A i z tym z B, wybierzmy dowolne $x \in A$ i $y \in B$. Wtedy

$$\deg(x) + \deg(y) \leqslant |A| - 1 + |B| - 1 < |A| + |B| = |V| = n,$$

co przeczy warunkowi Ore.

Rozważmy teraz najdłuższą drogę $x_1, \ldots, x_r$ w grafie, taką że wierzchołki występujące w tej drodze są parami różne.

Przypadek $\boxed{r = n}$; wszystkie wierzchołki droga odwiedziła. Jeżeli $\{x_n, x_1\}$ jest krawędzią to wtedy tę drogę można uzupełnić do szukanego cyklu. Rozważmy więc przypadek $\{x_n, x_1\} \notin E$.

Teza. Istnieje i, takie że $\{x_1, x_i\}, \{x_n, x_{i-1}\} \in E$

Dowód tezy. Niech

$$A = \{2 \leqslant i \leqslant n-1 : \{x_1, x_i\} \in E\}, \quad B = \{2 \leqslant i \leqslant n-1 : \{x_n, x_i\} \in E\};$$

dodatkowo oznaczmy przez $B + 1$ kompleksowe przesunięcie zbioru B w prawo. Z warunku Ore mamy $|A| + |B| \geqslant n$. Ponieważ $A, B \subseteq \{2, \ldots, n-1\}$ i $B + 1$ ma co najmniej $|B| - 1$ elementów w $\{2, \ldots, n-1\}$ więc $A \cap (B + 1) \neq \emptyset$ (inaczej $n - 2 - (|B| - 1) \geqslant |A|$, czyli $|A| + |B| \leqslant n - 1$). Biorąc $i \in A \cap (B + 1)$ otrzymujemy tezę.

Teza pozwala wypisać cykl Hamiltona: $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_i, x_1$ i to kończy tę część dowodu.

Przypadek $\boxed{r < n}$ w istocie nie może zajść z powodu maksymalności rozważanej drogi. Jeśli $r < n$ to owa maksymalność oznacza, że wierzchołki x_1, x_r łączą się krawędziami tylko z wierzchołkami ze zbioru $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Pierwsza część dowodu pozwala więc ustawić wierzchołki $x_1, \ldots, x_r$ w cykl. Teraz, biorąc $v \in V \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$ możemy dojść do sprzeczności, definiując dłuższą drogę, pdobnie jak w dowodzie Twierdzenia 7.3 □

Dodajmy na koniec, że cykle Hamiltona wiążą się z klasycznym zagadnieniem optymalizacji, problemem komiwojażera[1].

Komiwojażer planuje swoją podróż i studiuje połączenia między miastami (wraz z cenami biletów). Zastanawia się, jak odwiedzić wszystkie miasta, tak aby wyszło najtaniej. Jeśli założymy, że rozważamy pełny graf na n wierzchołkach (w którm są wszystkie możliwe krawędzie) i każda krawędź ma przypisana pewną wagę (cenę przejazdu), to szukamy cyklu Hamiltona, który będzie najtańszy. Problem ten można rozwiązać na wiele sposobów. na przykład znajdując zadawalające rozwiązanie bliskie optymalnemu. Zauważmy, ze szukanie 'na chybił trafił' nie jest dobrym pomysłem: mamy $10! > 3500000$ możliwości na zalednie 10 wierzchołkach.

Problemy Eulera (czy mozna prejść wszystkie krawędzie) i Hamiltona (czy można odwiedzić wszystkie wierzchołki) brzmią bardzo podobnie, ale dzieli je przepaść.

[1] termin przestarzały, teraz mówimy *sales representative*