B.1 Ile jest permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ które nie mają podciągu rosnącego długości 3?

B.2 Niech G będzie grafem 3-regularnym (to znaczy każdy wierzchołek jest stopnia 3), a $\{u, v\}$ będzie jego krawędzią. Wykazać, że liczba ścieżek Hamiltona o początku w u i końcu w v jest parzysta.

B.3 Pokazać, że w planarnym grafie, który ma cykl Eulera, można pokolorować ściany na 2 kolory tak, by ściany po obu stronach dowolnej krawędzi były innego koloru.

C.1 Dany jest ciąg a_n zadany przez $a_0 = 7, a_1 = 5$ i $a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} + a_n + 5$. Udowodnić, że istnieje n takie, że $0 \leq n \leq 10^{18}$ oraz $a_n + 21$ jest podzielne przed 10^9.

C.2 Udowodnić, że wśród dowolnych $2n + 1$ prostych na płaszczyźnie położonych tak, że każda para tych prostych przecina się, a w każdym punkcie przecinają się co najwyżej dwie z tych prostych, istnieją 3 proste, które ograniczają trójkąt, którego jeden z kątów ma miarę większą niż $\pi - \pi/n$.

C.3 Udowodnić, że dla dowolnego n zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

C.4 Na ile sposobów można wybrać z powtórzeniami r liczb ze zbioru $\{0, \ldots, 2m - 1\}$ tak, by każdą liczbę mniejszą niż m wybrać co najwyżej raz, a każdą liczbę nie mniejszą niż m wybrać parzyście wiele razy.

C.5 Udowodnić, że jeżeli dwie funkcje f, g określone na skończonym zbiorze X spełniają dla każdego $x \in X$ warunek $f(x) \neq g(x)$ to istnieje $A \subseteq X$, taki że $|A| \geq |X|/4$ i $f[A] \cap g[A] = \emptyset$.

Inaczej rzecz ujmując: jeżeli funkcja $h : X \to Y \times Y$ nie przyjmuje wartości na przekątnej to istnieje $B \subseteq Y$, taki że

$$\left| h^{-1}[B \times (Y \setminus B)] \right| \geq |X|/4.$$

C.6 Zacznijmy od pewnego spostrzeżenia dotyczącego permutacji. Przykładowa permutacja σ zbioru $\{1, 2, \ldots, 6\}$ w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie zapis oznacza, że $\sigma(1) = 6$, $\sigma(2) = 5$ itd. Każdą permutację można rozłożyć na rozłączne cykle; w przykładzie $\sigma = (16)(253)(4)$ – w nawiasie każdy element przechodzi na następny, ostatni na pierwszy.

A teraz do rzeczy: Dla danego n i $k > n$, obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo utworzona permutacja $2n$ elementów zawiera cykl długości k. Oszacować (z góry) prawdopodobieństwo, że losowa permutacja $2n$ elementów zawiera cykl długości $> n$.

Wskazówki do zadań 1-4 u DD; autorem zadania 5 jest PBN. Dla leniwych pasażerów: rozwiązanie 6 znajduje się TUTAJ