G. Plebanek	*Kombinatoryka (R)*	nr 1

Zasada szufladkowa

1. Zastanowić się, czy zasada szufladkowa wymaga dowodu.

2. Sprawdzić przez indukcję, że jeżeli $n(r-1)+1$ przedmiotów umieścimy w n szufladach to pewna szuflada zawiera $\geqslant r$ przedmiotów.

3. Pokazać, że wśród 52 liczb całkowitych znajdują się dwie różne, których suma lub różnica dzieli się przez 100.

4. Dane są liczby naturalne $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{37} = 60$. Wykazać, że $a_j - a_i = 13$ dla pewnych $i < j$.

5. 41 wież umieszczono na szachownicy 10×10. Pokazać, że można znaleźć 5 wież, które się nie atakują.

`Wskazówka:` Wieże atakują po liniach poziomych i pionowych. Zwinąć szachownicę w cylinder łącząc przeciwne strony i pokolorować przekątne 10 kolorami.

6. Pokazać, że wśród 15 różnych liczb naturalnych nie przekraczających 100, są 4 liczby a, b, c, d takie, że $a+b=c+d$ lub 3 liczby a, b, c tworzące postęp arytmetyczny.

7. Pokazać, że dla $n \geqslant 2$, w grupie n osób są dwie, które mają tę samą liczbę znajomych w grupie.

8. Udowodnić, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej dwie ściany o tej samie liczbie boków.

9. Na przyjęcie przyszło 100 osób. Każda osoba ma (być może 0) parzystą liczbę znajomych. Pokazać, że są przynajmniej 3 osoby mające tyle samo znajomych.

10. Pokazać, że wśród 5 punktów w kwadracie o boku 2 są dwa w odległości $\leqslant \sqrt{2}$.

11. Udowodnić, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku długości 4 umieścimy 17 punktów to odległość pewnych dwóch punktów nie przekracza 1.

12. W kwadracie o boku 1 danych jest $2n+1$ punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że pewne trzy punkty tworzą trójkąt o polu $\leqslant 1/(2n)$.

13. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (o obu współrzędnych całkowitych). Wykazać, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest kratowy.

Zadania uzupełniające

14. Udowodnić, że dla każdej liczby niewymiernej α istnieją ciągi liczb całkowitych p_n, q_n, takie że $q_n \to \infty$ oraz

$$|\alpha - p_n/q_n| < 1/q_n^2 \quad \text{dla każdego } n.$$

`Wskazówka:` Dla ustalonej liczby naturalnej N rozpatrzyć ciąg $n\alpha - [n\alpha]$ dla $n = 0, 1, \ldots, N$.

15. Udowodnić, że dla danej liczby pierwszej $p > 2$ istnieją liczby naturalne x, y, takie że liczba $1 + x^2 + y^2$ jest podzielna przez p.

Zadania 16–19 pochodzą ze strony dr Joanny Jaszuńskiej (MIM UW)

16. Każdy wierzchołek jedenastokąta foremnego pomalowano na jeden z czterech kolorów. Udowodnij, że można wybrać pięć kolejnych wierzchołków, pomalowanych co najwyżej trzema kolorami.

17. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

18. Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. W każdym trójkącie wyznaczonym przez pewną trójkę tych punktów najkrótszy bok malujemy na żółto. Udowodnij, że istnieje trójkąt o wszystkich bokach żółtych.

19. W pewnym kraju jest 66 miast, z których każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji: koleją, autobusami, linią lotniczą lub żeglugą śródlądową. Udowodnij, że pomiędzy pewnymi trzema miastami można odbyć podróż „po trójkącie”, korzystając tylko z jednego środka komunikacji.