Zliczanie zbiorów

1. W brydża gra czterech graczy; na początku każdy dostaje 13 kart z talii 52 kart.

Ile jest sposobów potasowania talii 52 kart ? Ile różnych układów kart może dostać gracz? Na ile sposobów można rozdać talię?

2. Ile różnych dodatnich dzielników ma liczba $3^4 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$, a ile liczba 620 ?

3. Ile zer na końcu ma liczba 50! ?

4. Ile liczb większych od 5400 ma różne cyfry, wśród których nie występują 2 i 7 ?

5. Niech X będzie zbiorem liczb czterocyfrowych, mających cyfry ze zbioru $\{1, 2, \dots, 5\}$. Niech A będzie podzbiorem tych $x \in X$, które mają różne cyfry, a B zbiorem tych $x \in X$, które są parzyste. Obliczyć $|A|, |B|, |A \cap B|, |A \setminus B|, |B \setminus A|, |X \setminus (A \cup B)|$.

6. Na ile sposobów można posadzić 12 osób przy okrągłym stole, jeśli pewna para osób odmawia siedzenia obok siebie ?

7. Wyznaczyć liczbę permutacji kołowych liczb 0, 1, 2, ..., 9, w których 0 i 9 nie leżą naprzeciwko.

8. Ile zbiorów złożonych z 3 liczb można utworzyć spośród liczb $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$, jeśli zbiór nie może zawierać dwu kolejnych liczb ?

9. Drużyna piłkarska złożona z 11 graczy ma być wybrana spośród 15 zawodników, wśród których 5 gra tylko w obronie, 8 gra w ataku i 2 może grać i w obronie i w ataku. Przyjmując, że w drużynie 7 zawodników gra w ataku i 4 w obronie, ile można utworzyć drużyn piłkarskich ?

10. Na ile sposobów można umieścić 8 wież na szachownicy tak, że żadna wieża nie atakuje innej (tzn. dwie wieże nie mogą znajdować się na jednej linii pionowej lub poziomej) ? Na ile sposobów, jeśli każda wieża jest inaczej oznaczona ?

11. Mamy 5 identycznych wież koloru czerwonego i 3 koloru niebieskiego. Na ile sposobów można je umieścić na szachownicy 8×8, aby się nie atakowały ?

12. Na ile sposobów można posadzić 6 panów i 6 pań przy okrągłym stole, jeśli panie i panowie mają siedzieć na przemian ?

13. Czterosobowy komitet ma być wybrany spośród członków klubu, który składa się z 10 panów i 12 pań. Na ile sposobów można utworzyć komitet, jeśli musi on zawierać przynajmniej dwie panie ? Na ile sposobów, jeśli dodatkowo Pani Ładna i Pan Przystojny odmawiają być razem w komitecie ?

14. Sekretarka pracuje w budynku położonym 9 przecznic na wschód i 7 na północ od swojego domu. Codziennie przechodząc do pracy przechodzi 16 odcinków ulic. Ile jest możliwych tras ? Załóżmy, że odcinek ulicy w kierunku wschodnim, zaczynający się 4 przecznice na wschód i 3 na północ, został zalany, a sekretarka nie umie (lub nie chce) pływać. Ile jest wtedy możliwych tras ?

Zadania uzupełniające

15. Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie dzieli ją na co najwyżej $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$ obszarów.

16. Udowodnić, że n płaszczyzn dzieli przestrzeń na co najwyżej $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$ obszarów.

17. Niech a będzie liczbą całkowitą, a $p > 2$ liczbą pierwszą. Wykazać, że istnieją liczby całkowite x, y, takie że $(x, y) \neq (0, 0)$, $|x|, |y| \leqslant \sqrt{p}$ oraz p dzieli $ax - y$.

Zadanie uzupełniające, dla brydżystów

18. Gramy szlema w piki, mamy $\spadesuit AKW109$ w ręce i $\spadesuit xxx$ na stole; komunikacja swobodna. Dlaczego impasujemy damę? Dlaczego gramy ‘z góry’, gdy na stole są cztery blotki pikowe?