

LICZBY STIRLINGA

1. Przypomnijmy, że **liczby Stirlinga drugiego rodzaju** $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, można zdefiniować
- (a) kombinatorycznie: $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ jest liczbą podziałów zbioru n -elementowego na k niepustych podzbiorów
- (b) analitycznie: $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ są współczynnikami we wzorze

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}, \text{ gdzie } x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Sprawdzić samemu lub przeczytać w notatkach do wykładu, że w obu przypadkach otrzymujemy te same liczby, spełniające warunek rekurencyjny

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Wykazać, że $k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ jest ilością surjekcji zbioru n elementowego na zbiór k elementowy.
3. Zauważyć (kombinatorycznie), że $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}$. Udowodnić, że dla $n \geq 3$ zachodzi wzór

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-2 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

WSKAZÓWKA: Zapewne indukcja działa. Ale lepiej zauważyć, że podział n elementów na $n-2$ części jest tożsamy z wybraniem dwóch dubletonów lub jednej trójki.

4. Znaleźć dowód tożsamości

$$\sum_{k=0}^m k \left\{ \begin{smallmatrix} n+k \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n+m+1 \\ m \end{smallmatrix} \right\}$$

WSKAZÓWKA: Albo indukcja, albo kombinatorycznie: prawa strona obliczą liczbę podziałów zbioru o $n+m+1$ elementach na m części, lewa zlicza te podziały w pewien sposób.

5. **Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju.** Definiujemy $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ jako liczbę sposobów rozmieszczenia n obiektów w k cyklach, przy czym $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 1$. Obrazowo, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ wylicza, na ile sposobów można posadzić n osób przy k okrągłych stołach (przy każdym ma ktoś siedzieć).

Sprawdzić, że

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

6. Obliczyć $\sum_{k=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

WSKAZÓWKA: Podział n elementów na rozłącze cykle wyznacza jednoznacznie permutację wszystkich elementów, patrz UWAGA.

7. Udowodnić kombinatorycznie, że

$$\sum_{k=1}^n k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

WSKAZÓWKA: Rozważmy permutację zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ o k cyklach, z których jeden został wyróżniony. Odpowiada jej permutacja zbioru $\{1, \dots, n+1\}$ o dwóch cyklach: jednym z nich jest wyróżniony cykl wyjściowej permutacji; patrz też UWAGA.

8. Znaleźć (jakikolwiek) dowody tożsamości

$$\sum_{k=0}^m (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} \qquad \sum_{k=m}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}.$$

9. Sprawdzić indukcyjnie, że oznaczając $x^{\bar{k}} = x(x+1)\dots(x+k-1)$, mamy

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}, \qquad x^n = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

10. **Liczby Bella.** Niech $B(n)$ będzie liczbą wszystkich partycji zbioru n -elementowego na niepuste podzbiory; sprawdzić że $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$; zauważyć, że $B(n) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

11. Sprawdzić, że liczby Bella spełniają wzór rekurencyjny

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k).$$

UWAGA: Pewne spostrzeżenia dotyczące permutacji, na przykładzie.
Przykładowa permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, 6\}$ w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie zapis oznacza, że $\sigma(1) = 6$, $\sigma(2) = 5$ itd. Każdą permutację można rozłożyć na rozłączne cykle: w przykładzie $\sigma = (16)(253)(4)$ - w nawiasie każdy element przechodzi na następny, ostatni na pierwszy.

Przydatna jest uwaga, że każda permutacja 6 elementów wyznacza jednoznacznie cykl siedmioelementowy, w przykładzie jest to (6524317) .

Podsumowując, istnieje bijekcja pomiędzy podziałem zbioru mocy 6 na cykle, a cyklami zbioru siedmioelementowego.