

NIESKOŃCZONE TWIERDZENIA RAMSEYA

1. Wykazać, że każdy ciąg $x_n \in \mathbb{R}$ zawiera podciąg stały, podciąg rosnący lub podciąg malejący.
2. Wykazać, że dla dowolnej skończonej rodziny różnowartościowych funkcji $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje nieskończony zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, na którym wszystkie te funkcje są monotoniczne.
3. Wykazać, że każdy nieskończony zbiór częściowo uporządkowany zawiera nieskończony łańcuch lub nieskończony antyłańcuch.
4. Niech $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie częściowo uporządkowany ‘po osiach’, czyli $(n_1, n_2) \preceq (k_1, k_2)$ gdy $n_1 \leq k_1$ i $n_2 \leq k_2$. Udowodnić, że każdy nieskończony $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zawiera nieskończony łańcuch w porządku $\preceq$.
5. Uogólnić poprzednie zadanie na przypadek $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
6. Załóżmy, że zbiory $A_n \subseteq \mathbb{N}$ spełniają warunek $|A_n \triangle A_k| \geq 7$ dla dowolnych $n \neq k$. Udowodnić, że istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \dots$, taki że $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geq 4$ dla wszystkich $i > j$, lub istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \dots$, taki $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geq 4$ dla wszystkich $i < j$.

SKOŃCZONE TWIERDZENIA RAMSEYA

7. Krawędzie grafu pełnego K_6 pokolorowano dwoma kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt. Pokazać na przykładzie, że taki fakt nie zachodzi dla grafu K_5 . W oznaczeniach z wykładu oznacza to, że $R(3, 3) = 6$.
8. Krawędzie grafu K_{17} pokolorowano trzema kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt. Sprawdzić, że liczba 16 jest tutaj za mała. W analogicznej notacji (dla trzech kolorów) zadanie oznacza, że $R(3, 3, 3) = 17$. Jak twierdzi [Wikipedia](#), nie wiadomo czy $R(3, 3, 4) = 30$, czy też 31. Może nam się uda:-)
9. Jak wiemy z wykładu, $R(n, n) \leq \binom{2n-2}{n-1}$. Znaleźć oszacowanie na $R(n, n, n)$; na przykład zauważyć, że dla $N = R(n, n)$ zachodzi $R(n, n, n) \leq R(N, N)$.
10. Udowodnić, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje liczba Schura $S(r)$, to jest taka liczba naturalna, że dla dowolnego kolorowania elementów z $A = \{1, 2, \dots, S(r)\}$ za pomocą r kolorów istnieją trzy elementy $x, y, z \in A$ tego samego koloru, spełniające równanie $x + y = z$.

WSKAZÓWKA: W razie trudności patrz 3.1 [w tym opracowaniu](#).