

A.1 Ile jest permutacji zbioru  $\{1, \dots, n\}$  które nie mają podciągu rosnącego długości 3?

A.2 Dany jest ciąg  $a_n$  zadany przez  $a_0 = 7, a_1 = 5$  i  $a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} + a_n + 5$ . Udowodnić, że istnieje  $n$  takie, że  $0 \leq n \leq 10^{18}$  oraz  $a_n + 21$  jest podzielne przez  $10^9$ .

A.3 Udowodnić, że dla dowolnego  $n$  zachodzi

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

A.4 Na ile sposobów można wybrać z powtórzeniami  $r$  liczb ze zbioru  $\{0, \dots, 2m-1\}$  tak, by każdą liczbę mniejszą niż  $m$  wybrać co najwyżej raz, a każdą liczbę nie mniejszą niż  $m$  wybrać parzyście wiele razy.

A.5 Udowodnić, że jeżeli dwie funkcje  $f, g$  określone na skończonym zbiorze  $X$  spełniają dla każdego  $x \in X$  warunek  $f(x) \neq g(x)$  to istnieje  $A \subseteq X$ , taki że  $|A| \geq |X|/4$  i  $f[A] \cap g[A] = \emptyset$ .

Inaczej rzecz ujmując: jeżeli funkcja  $h : X \rightarrow Y \times Y$  nie przyjmuje wartości na przekątnej to istnieje  $B \subseteq Y$ , taki że

$$\left| h^{-1}[B \times (Y \setminus B)] \right| \geq |X|/4.$$