

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka teoretyczna

Mikołaj Marsy

Topologiczne własności przestrzeni miar

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. Grzegorza Plebanka

Wrocław 2025

1. WSTĘP

Każda miara probabilistyczna na przestrzeni zwartej K działa poprzez całkowanie na dowolną funkcję ciągłą określoną na tej przestrzeni. Z tego powodu naturalnym wyborem topologii dla przestrzeni miar probabilistycznych (oznaczonej dalej jako $\mathcal{P}(K)$) jest najmniejsza taka topologia, że odwzorowanie

$$\mu \mapsto \int f d\mu$$

jest ciągłe dla każdej funkcji ciągłej f . Tak zdefiniowana przestrzeń jest przedmiotem zainteresowania w analizie funkcjonalnej: tę topologię nazywa się wówczas $*$ -słabą topologią. Nietrudno pokazać, że miary rozumiane jako całki są funkcjonalami na $C(K)$. Co więcej, klasyczne twierdzenie Riesz mówi, że wszystkie funkcjonały można utożsamić z miarami znakowanymi na K (oznaczanej jako $\mathcal{M}(K)$). Celem tej pracy jest jednak zbadanie struktur tych przestrzeni jako takich.

Struktura $\mathcal{P}(K)$ dla nieskończonej zwartej i metryzowalnej przestrzeni K jest znana. Wtedy przestrzeń miar jest homeomorficzna z kostką Hilberta $[0, 1]^\omega$ ([5]). W tej pracy ograniczymy się do studiowania niemetryzowalnych przestrzeni $\mathcal{P}(2^\kappa)$ dla nieprzeliczalnych liczb κ . Przestrzenie, na których miary są definiowane, są zerowymiarowe, a zatem $*$ -słaba topologia sprowadza się do topologii zbieżności na zbiorach otwarto-domkniętych i możemy tę przestrzeń utożsamić z przestrzenią skończenie addytywnych miar probabilistycznych na algebrze zbiorów otwarto-domkniętych $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$. Drugim bohaterem tej pracy jest $\mathcal{M}_1(2^\kappa)$, przestrzeń miar znakowanych o wahaniu nie większym niż 1, którą w podobny sposób można utożsamić z przestrzenią skończenie addytywnych miar znakowanych o wahaniu ≤ 1 na zbiorach otwarto-domkniętych, $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$.

W rozdziale 3. pokażemy, że dla nieprzeliczalnych κ przestrzenie $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$ oraz $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ nie są homeomorficzne. Pomocnicza własność $(*)$, która odróżnia te przestrzenie, określa w pewnym topologicznym sensie wielkość przestrzeni.

W rozdziale 4. udowodnimy, że dla $\kappa > \omega_1$ przestrzeń $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ nie jest retraktem przy rozumieniu jej jako podprzestrzeni $[0, 1]^{\text{Clop}(2^\kappa)}$ ani $\mathcal{M}_{3/2}(\text{Clop}(2^\kappa))$. W tym rozdziale skorzystamy technicznych lematów udowodnionych przez Ditora i Haydona w [2], gdzie udowadniają oni, że $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ nie jest absolutnym retraktem. W kluczowym miejscu jednak zmienimy strategię dowodu. Dodatkowo niewielka zmiana naszego rozumowania daje nam drugi wynik, o którym Haydon i Ditor nie wspominają.

Z tego miejsca warto wspomnieć prace Plebanka [5] oraz Fedorchuka [4], po które może sięgnąć czytelnik zainteresowany szerszym oglądem tej teorii.

2. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

2.1. Przestrzenie miar na algebrach Boole’a. Będziemy rozważać przestrzeń miar probabilistycznych oraz miar znakowanych (o ustalonym ograniczeniu wahania) na pewnych algebrach Boole’a. Dla ustalonej algebry Boole’a $\mathcal{A}$ przez $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ rozumiemy zbiór skończenie addytywnych miar probabilistycznych na $\mathcal{A}$, zaś przez $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ będziemy oznaczać przestrzeń skończenie addytywnych miar znakowanych o wahaniu $\leq r$. W zakresie podstawowych własności algebr Boole’a odsyłamy czytelnika do monografii Kopellberg [9], ale w tej pracy będziemy posługiwać się klasyczną notacją działań boolowskich ($a \vee b$, $a \wedge b$, $a - b$).

Definicja 2.1.1. Funkcja na algebrze μ jest skończenie addytywną miarą probabilistyczną, gdy spełnia warunki

- (1) $\mu(1_{\mathcal{A}}) = 1$, $\mu(0_{\mathcal{A}}) = 0$.
- (2) $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ gdy $a \wedge b = 0_{\mathcal{A}}$,
- (3) $\mu(a) \geq 0$ dla każdego $a \in \mathcal{A}$.

Warunki (2) i (3) pociągają warunek $\mu(a) \leq \mu(b)$ gdy $a \leq b$. Wobec tego zachodzi inkluzja $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subseteq [0, 1]^{\mathcal{A}}$, dlatego na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ zadajemy topologię podprzestrzeni.

Twierdzenie 2.1.2. Przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest domkniętą podprzestrzenią $[0, 1]^{\mathcal{A}}$.

Dowód. Załóżmy, że $f \in [0, 1]^{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Jeżeli $f(1_{\mathcal{A}}) \neq 1$, to wtedy dla pewnego $\varepsilon > 0$ zachodzi $|f(1_{\mathcal{A}}) - 1| > \varepsilon$. Wobec tego

$$\{h \in [0, 1]^{\mathcal{A}} : |h(1_{\mathcal{A}}) - f(1_{\mathcal{A}})| < \varepsilon\} \cap \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \emptyset.$$

Podobnie znajdujemy otwarte otoczenie omijające $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ gdy $f(0_{\mathcal{A}}) \neq 0$.

Założmy teraz, że f nie spełnia warunku (2) z definicji 2.1.1. Wtedy dla pewnych $a, b \in \mathcal{A}$, spełniających $a \wedge b = 0_{\mathcal{A}}$, oraz pewnego $\varepsilon > 0$ zachodzi $|f(a \vee b) - f(a) - f(b)| > \varepsilon$. Załóżmy, teraz, że funkcja $h \in [0, 1]^{\mathcal{A}}$ spełnia warunki

- (1) $|h(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{4}$,
- (2) $|h(b) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{4}$,
- (3) $|h(a \vee b) - f(a \vee b)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Obliczamy wtedy

$$\begin{aligned} |h(a \vee b) - h(a) - h(b)| &\geq \underbrace{|[f(a) + f(b) - f(a \vee b)]|}_{>\varepsilon} - \\ &- \underbrace{|h(a) - f(a)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} - \underbrace{|h(b) - f(b)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} - \underbrace{|h(a \vee b) - f(a \vee b)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} > \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Warunki (1)-(3) zadają otwarte otoczenie funkcji h omijające $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. □

Z klasycznego twierdzenia Tichonowa przestrzeń $[0, 1]^{\mathcal{A}}$ jest zwarta, wobec tego każda jej domknięta podprzestrzeń również jest zwarta. Stąd $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ jest przestrzenią zwartą.

Teraz przedstawimy kilka faktów dotyczących skończenie addytywnych miar znakowanych. Po więcej informacji czytelnik może sięgnąć do artykułu Yosidy i Hewitta [10].

Definicja 2.1.3. Niech μ będzie skończoną funkcją na algebrze $\mathcal{A}$. Powiemy, że μ jest skończenie addytywną miarą znakowaną, gdy spełnione są warunki

- (1) $\mu(0_{\mathcal{A}}) = 0$,
- (2) $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ gdy $a \wedge b = 0_{\mathcal{A}}$,
- (3) $\sup_{a \in \mathcal{A}} |\mu(a)| < \infty$.

Miary znakowane z działaniami punktowymi tworzą przestrzeń liniową (przez $\mathbf{0}$ będziemy rozumieć miarę stałe równą 0).

Definicja 2.1.4. Niech μ będzie miarą znakowaną na $\mathcal{A}$. Definiujemy jej wahanie wzorem

$$|\mu|(a) = \sup_{b \leq a} (|\mu(b)| + |\mu(a - b)|).$$

Lemat 2.1.5. *Wahanie miary μ jest addytywną, nieujemną funkcją na $\mathcal{A}$.*

Dowód. Nieujemność jest oczywista. Sprawdzamy addytywność. Niech $a_1 \wedge a_2 = 0_{\mathcal{A}}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |\mu|(a_1 \vee a_2) &= \sup\{|\mu(b)| + |\mu((a_1 \vee a_2) - b)| : b \leq a_1 \vee a_2\} = \\ &= \sup\{|\mu(a_1 \wedge b) + \mu(a_2 \wedge b)| + |\mu(a_1 \wedge (1_{\mathcal{A}} - b)) + \mu(a_2 \wedge (1_{\mathcal{A}} - b))| : b \in \mathcal{A}\} \leq \\ &= \sup\{|\mu(a_1 \wedge b)| + |\mu(a_2 \wedge b)| + |\mu(a_1 \wedge (1_{\mathcal{A}} - b))| + |\mu(a_2 \wedge (1_{\mathcal{A}} - b))| : b \in \mathcal{A}\} \leq \\ &= |\mu|(a_1) + |\mu|(a_2). \end{aligned}$$

Niech teraz $b_1 \leq a_1, b_2 \leq a_2$ będą takie, że

$$\begin{aligned} |\mu(b_1)| + |\mu(a_1 - b_1)| &\geq |\mu|(a_1) - \varepsilon/2 \\ |\mu(b_2)| + |\mu(a_2 - b_2)| &\geq |\mu|(a_2) - \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Bez straty ogólności możemy założyć również, że

$$\begin{aligned} \mu(b_1) &\geq 0, & \mu(a_1 - b_1) &\leq 0, \\ \mu(b_2) &\geq 0, & \mu(a_2 - b_2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} |\mu|(a_1) + |\mu|(a_2) - \varepsilon &\leq |\mu(b_1)| + |\mu(a_1 - b_1)| + |\mu(b_2)| + |\mu(a_2 - b_2)| = \\ &= |\mu(b_1 \vee b_2)| + |\mu((a_1 \vee a_2) - (b_1 \vee b_2))| \leq |\mu|(a_1 \vee a_2). \end{aligned}$$

□

Skoro wahanie jest nieujemne, to zachodzi nierówność $|\mu|(b) \leq |\mu|(a)$ o ile $b \leq a$. Co więcej, zachodzi również

$$|\mu(a)| \leq |\mu|(a).$$

Wobec tego każdą miarę znakowaną możemy zapisać jako

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

gdzie $\mu^+ = (|\mu| + \mu)/2, \mu^- = (|\mu| - \mu)/2$. Te miary zaś są nieujemne. Ponadto dla każdego a spełniona jest nierówność $|\mu(a)| \leq |\mu|(1_{\mathcal{A}})$. Liczbę $|\mu|(1_{\mathcal{A}})$ nazywamy absolutnym wahaniami miary μ .

Definicja 2.1.6. Przestrzeń $\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) \subseteq [-r, r]^{\mathcal{A}}$ jest przestrzenią miar o absolutnym wahaniiu $\leq r$.

Dowód następnego twierdzenia przebiega bardzo podobnie do dowodu twierdzenia 2.1.2, dlatego go pomijamy.

Twierdzenie 2.1.7. *Przestrzeń $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ jest domkniętą podprzestrzenią $[-r, r]^{\mathcal{A}}$.*

Tak samo zatem jak w przypadku $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ wnioskujemy, że przestrzeń $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ jest zwarta.

Lemat 2.1.8. *Zachodzi równość*

$$\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) = \{\alpha\mu_1 - \beta\mu_2 : \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \alpha + \beta \leq r, \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Dowód. Załóżmy, że $\mu = \alpha\mu_1 - \beta\mu_2$ dla pewnych miar probabilistycznych μ_1, μ_2 . Wtedy zachodzi

$$-\beta \leq \mu(a) \leq \alpha,$$

a zatem $|\mu|(a) \leq \beta + \alpha$. Niech teraz $|\mu|(1_A) \leq r$. Wystarczy pokazać, że

$$\mu^+(1_A) + \mu^-(1_A) \leq r.$$

Zachodzi jednak

$$\mu^+ + \mu^- = |\mu|.$$

□

2.2. Algebry zbiorów otwarto-domkniętych. W tym rozdziale rozważymy pewne algebry zbiorów. Algebrą, która będzie nas szczególnie interesować, jest algebra bazowych zbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni ciągów $\{0, 1\}^\kappa$ (oznaczanej dalej jako 2^κ) dla pewnej nieskończonej liczby kardynalnej κ (liczby kardynalne będziemy traktować jak zbiory liczb porządkowych mniejszych od niej samej). Oznaczamy ją jako $\text{Clop}(2^\kappa)$. Będą nas również interesowały jej pewne podalgebry. W tym rozdziale udowodnimy proste fakty oraz przypomnimy klasyczne definicje dotyczące ogólnej teorii algebr Boole'a, które później zastosujemy do podalgebr $\text{Clop}(2^\kappa)$.

Niech $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A} \subseteq P(X)$ będzie dowolną rodziną podzbiorów pewnej algebry zbiorów $\mathcal{A}$. Wtedy przez $\langle \mathcal{Z} \rangle$ rozumiemy najmniejszą algebrę podzbiorów X , która zawiera $\mathcal{Z}$.

Lemat 2.2.1. *Niech $A \in \langle \mathcal{Z} \rangle$ będzie elementem algebry podzbiorów X generowanej przez rodzinę $\mathcal{Z}$. Wtedy*

$$A = (z_1^1 \cap \dots \cap z_n^1) \cup \dots \cup (z_1^m \cap \dots \cap z_n^m)$$

dla $z_j^i \in \mathcal{Z} \cup \{\emptyset, X\}$.

Dowód. Rodzina elementów spełniających tej postaci jest zamknięta na sumy oraz zawiera wszystkie generatory, więc aby uzasadnić tezę, wystarczy sprawdzić, że rodzina ta jest zamknięta na branie dopełnień. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} & [(z_1^1 \cap \dots \cap z_n^1) \cup \dots \cup (z_1^m \cap \dots \cap z_n^m)]^c = \left[\bigcup_{i \leq m} \left(\bigcap_{j \leq n} z_j^i \right) \right]^c = \bigcap_{i \leq m} \left(\bigcup_{j \leq n} (z_j^i)^c \right) = \\ & = \bigcup_{\xi \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}} \left(\bigcap_{i \leq n} (z_{\xi(i)}^i)^c \right) \end{aligned}$$

□

W dalszej części przydatne będzie oznaczenie zbiorów, które, jak niebawem udowodnimy, generują algebrę $\text{Clop}(2^\kappa)$. Niech $\alpha \in \kappa$ oraz $i \in \{0, 1\}$. Wtedy oznaczamy

$$C_\alpha^i = \{x \in 2^\kappa : x(\alpha) = i\}.$$

Zbiory tej postaci oraz ich przekroje nazywamy cylindrami.

Lemat 2.2.2. *Algebra zbiorów otwarto-domkniętych $\text{Clop}(2^\kappa)$ jest generowana przez cylindry.*

Dowód. Cylindry są otwarto-domknięte, więc zachodzi zawieranie

$$\langle C_\alpha^i : i \in \{0, 1\}, \alpha < \kappa \rangle \subseteq \text{Clop}(2^\kappa).$$

Wystarczy zatem sprawdzić, że każdy zbiór otwarto domknięty jest sumą skończenie wielu cylindrów. Ustalmy zatem zbiór otwarto-domknięty A . Skoro A jest otwarty, to jest on sumą cylindrów: $A = \bigcup_{k \in K} C_k$. Z domkniętości wnioskujemy, że A jest zwarty, więc $A = \bigcup_{n \leq N} C_{k_n}$ dla pewnego N oraz $k_1, \dots, k_N \in K$. $\square$

Definicja 2.2.3. Niech $I \subseteq \kappa$ oraz $A \subseteq 2^\kappa$. Będziemy oznaczać $A \sim I$, gdy dla dowolnego $x \in A$ oraz dowolnego $y \in 2^\kappa$ zachodzi $y \in A$ gdy $y \upharpoonright_I = x \upharpoonright_I$. Powiemy wtedy, że A jest wyznaczony przez I . Oznaczmy również

$$\mathcal{C}_I = \{A \in \text{Clop}(2^\kappa) : A \sim I\}$$

Uwaga 2.2.4. Z tej definicji wynika, że jeżeli mamy $A \subseteq 2^\kappa$ oraz dla pewnego $I \subseteq J \subseteq \kappa$ zachodzi $A \in \mathcal{C}_I$, to wtedy $A \in \mathcal{C}_J$.

Jeżeli $I \subseteq \kappa$, to symbol π_I oznacza rzutowanie ciągu na współrzędne I . Innymi słowy funkcja $\pi_I : 2^\kappa \rightarrow 2^I$ zadana jest wzorem $\pi_I(x) = x \upharpoonright_I$.

Lemat 2.2.5. Niech $A \subseteq 2^\kappa$ oraz $I \subseteq \kappa$. Zachodzi relacja $A \sim I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi_I^{-1}[\pi_I[A]] = A$.

Dowód. Załóżmy, że $A \sim I$. Oczywiście jest, że $A \subseteq \pi_I^{-1}[\pi_I[A]]$, więc wystarczy udowodnić zawieranie w drugą stronę. Niech $x \in \pi_I^{-1}[\pi_I[A]]$. To oznacza, że $\pi_I(x) = \pi_I(y)$ dla pewnego $a \in A$. To zaś oznacza, że $x \upharpoonright_I = a \upharpoonright_I$. Wobec tego z założenia $x \in A$. Załóżmy teraz, że $A = \pi_I^{-1}[\pi_I[A]]$. Ustalmy $x \in X$ takie, że $x \upharpoonright_I = a \upharpoonright_I$ dla pewnego $a \in A$. Wtedy mamy $x \in \pi_I^{-1}[\pi_I[A]] = A$. $\square$

Wniosek 2.2.6. Jeżeli I jest zbiorem skończonym, to $\mathcal{C}_I$ jest zbiorem skończonym.

Dowód. Mamy $|\mathcal{C}_I| \leq |\text{Clop}(2^I)| < \aleph_0$. $\square$

Lemat 2.2.7. Jeżeli $A \sim I_A$ oraz $B \sim I_B$, to wtedy

- (1) $A \cap B \sim I_A \cup I_B$,
- (2) $A^c \sim I_A$.

Dowód. Załóżmy, że $y \in 2^\kappa$ oraz $y \upharpoonright_{I_A \cup I_B} = x \upharpoonright_{I_A \cup I_B}$ dla pewnego $x \in A \cap B$. Wtedy w szczególności zachodzi $y \upharpoonright_{I_A} = x \upharpoonright_{I_A}$, a zatem $y \in A$. Podobnie uzasadniamy, że $y \in B$, co kończy dowód pierwszego punktu. Niech teraz $y \in 2^\kappa$ oraz $y \upharpoonright_{I_A} = x \upharpoonright_{I_A}$ dla pewnego $x \in A^c$. Dla każdego $z \in A$ mamy wtedy $i \in I_A$ takie, że

$$z(i) \neq x(i) = y(i).$$

Wobec tego dla każdego $z \in A$ mamy $y \neq z$, a zatem $y \in A^c$. $\square$

Wniosek 2.2.8. Jeżeli $A \sim I_A$ oraz $B \sim I_B$, to wtedy $A \cup B \sim I_A \cup I_B$.

Dowód. Mamy $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \sim I_A \cup I_B$. $\square$

Wniosek 2.2.9. Rodzina $\mathcal{C}_I$ z działaniami mnogościowymi jest algebrą Boole'a.

Lemat 2.2.10. Jeżeli $A \sim I$ oraz $A \sim J$, to $A \sim I \cap J$.

Dowód. Jeżeli $A = \emptyset$, to teza jest spełniona. Załóżmy, że A jest niepusty oraz $x \in A$ będzie takim elementem, że $x \restriction_{I \cap J} = y \restriction_{I \cap J}$ dla pewnego $y \in 2^\kappa$. Z założenia, że $A \sim I$ wnioskujemy, że $x' \in A$, gdzie

$$x'(\alpha) = \begin{cases} x(\alpha) & \text{dla } \alpha \in I \\ y(\alpha) & \text{dla } \alpha \in J \setminus I \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wtedy $x' \restriction_J = y \restriction_J$, ponieważ $J = (J \setminus I) \cup (J \cap I)$. Wobec tego $y \in A$. $\square$

Lemat 2.2.11. *Niech $I \subseteq \kappa$ oraz $A \in \mathcal{C}_I$. Wtedy istnieje skończony zbiór $I_0 \subseteq I$ taki, że $A \in \mathcal{C}_{I_0}$.*

Dowód. Z dowodu lematu 2.2.2 oraz z lematu 2.2.8 wnioskujemy, że każdy $A \sim F$ dla pewnego skończonego zbioru $F \subseteq \kappa$. Niech $I_0 = I \cap F$. Z lematu 2.2.10 wnioskujemy, że $A \sim I_0$. $\square$

W dalszej części przydatne będą wyniki dotyczące algebry zbiorów otwarto-domkniętych zależnych od skończenie wielu współrzędnych. Wniosek 2.2.6 mówi nam, że te algebry są skończone. Przypomnimy teraz pewne ogólne własności algebr skończonych.

Definicja 2.2.12. Niech $a \in \mathcal{A}$ będzie niezerowym elementem pewnej algebry Boole'a. Powiemy, że a jest atomem, jeżeli

$$\forall b \in \mathcal{A} (b \leq a \implies b \in \{0_{\mathcal{A}}, a\}).$$

Dla każdych dwóch elementów algebry ich iloczyn jest mniejszy niż każdy z nich. Wobec tego jeżeli a_1, a_2 są różnymi atomami, to $a_1 \wedge a_2 = 0_{\mathcal{A}}$. Gdyby tak nie było to mielibyśmy $a_1 = a_1 \wedge a_2 = a_2$, co jest sprzeczne z założeniem.

Lemat 2.2.13. *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest skończoną algebrą oraz $a \in \mathcal{A}$ jest niezerowym elementem, to wtedy istnieje atom d taki, że $d \leq a$.*

Dowód. Załóżmy, że żaden atom nie jest mniejszy niż a . W szczególności a nie jest atomem. Konstruujemy ciąg $\{a_n\}_n$ spełniający:

- (1) $a_0 = a$,
- (2) $0_{\mathcal{A}} < a_{n+1} < a_n \leq a_0$.

Założenie, że nic mniejszego niż a nie jest atomem, pozwala przeprowadzić nam taką konstrukcję. Wtedy $\{a_n\}_n$ jest nieskończonym podzbiorem skończonej algebry. $\square$

Lemat 2.2.14. *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest skończoną algebrą Boole'a, to każdy jej element można przedstawić w jedyny sposób jako sumę atomów.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że sumy różne sumy atomów są różne. Niech D_1, D_2 będą skończonymi zbiorami atomów oraz $d_0 \in D_1, d_0 \notin D_2$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} d_0 \wedge \bigvee_{d \in D_1} d &= \bigvee_{d \in D_1} d_0 \wedge d = d_0, \\ d_0 \wedge \bigvee_{d \in D_2} d &= \bigvee_{d \in D_2} d_0 \wedge d = 0_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Wobec tego $\bigvee_{d \in D_1} d \neq \bigvee_{d \in D_2} d$. Teraz wystarczy pokazać, że każdy element jest sumą atomów. Ustalmy $a \in \mathcal{A}$. Niech $D_0 = \{d \in D : d \leq a\}$. Jest to zbiór skończony. Oznaczmy $s = \bigvee_{d \in D_0} d$. Chcemy pokazać, że $s = a$. Mamy oczywiście $s \leq a$. Załóżmy, że $a - s > 0_{\mathcal{A}}$. Z lematu 2.2.13 istnieje $d_0 \in D$ taki, że $d_0 \leq a - s \leq a$. Stąd wynika, że $d_0 \wedge s = 0_{\mathcal{A}}$, ale $d \in D_0$, więc z drugiej strony $d_0 \wedge s = d_0$. Wobec tego $a - s = 0_{\mathcal{A}}$, a zatem $a = s$. $\square$

Wniosek 2.2.15. *Niech $\mathcal{A}$ będzie skończoną algebrą Boole'a, a D zbiorem jej atomów. Jeżeli $m : D \rightarrow [0, 1]$ spełnia*

$$\sum_{d \in D} m(d) = 1,$$

to m rozszerza się do miary probabilistycznej na $\mathcal{A}$.

Dowód. Niech $D_a = \{d \in D : d \leq a\}$. Zadajemy tę miarę wzorem

$$\mu(a) = \sum_{d \in D_a} m(d).$$

$\square$

Aby efektywnie prowadzić dalsze rozumowanie wprowadźmy nowy symbol.

Definicja 2.2.16. Niech $s_1 \in 2^{I_1}, \dots, s_n \in 2^{I_n}$, gdzie dla każdego $k \leq n$ zbiór I_k jest skończonym podzbiorem κ . Wtedy oznaczamy

$$[s_1, s_2, \dots, s_n] = \{x \in 2^\kappa : \forall k \leq n \ x \upharpoonright_{I_k} = s_k\}.$$

Jest to zbiór otwarto-domknięty.

Zauważmy, że jeżeli $I_1, \dots, I_n \subseteq \kappa$ są parami rozłącznymi skończonymi zbiorami, to wtedy każdy atom d algebry $\mathcal{C}_{I_1 \cup \dots \cup I_n}$ jest postaci

$$d = [s_1, \dots, s_n],$$

dla pewnych $s_1 \in 2^{I_1}, \dots, s_n \in 2^{I_n}$.

Następny lemat odegra kluczową rolę w dowodzie własności (*) (patrz rozdział 3.) dla przestrzeni miar probabilistycznych $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ dla nieprzeliczalnych κ .

Lemat 2.2.17. *Niech $I, J, R \subseteq \kappa$ będą parami rozłącznymi skończonymi zbiorami. Jeżeli $n \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_{I \cup R})$ oraz $m \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_{J \cup R})$ są takimi miarami, że $n \upharpoonright_{\mathcal{C}_R} = m \upharpoonright_{\mathcal{C}_R}$, to istnieje miara $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_{I \cup J \cup R})$ rozszerzającą m i n .*

Dowód. Wystarczy, że definiujemy p na atomach $\mathcal{C}_{I \cup J \cup R}$. Atomy tej algebry są postaci $[i, j, r]$ dla pewnych $i \in 2^I, j \in 2^J, r \in 2^R$. Ta reprezentacja jest oczywiście jednoznaczna. Definiujemy teraz

$$p([i, j, r]) = \frac{n([i, r])m([j, r])}{m([r])}.$$

Zachodzi teraz

$$\sum_{i \in 2^I} p([i, j, r]) = \frac{m([j, r])}{m([r])} \sum_{i \in 2^I} n([i, r]) = \frac{m([j, r])}{m([r])} n(\underbrace{\bigcup_{i \in 2^I} [i, r]}_{=[r]}) = m([j, r]),$$

$$\sum_{j \in 2^J} p([i, j, r]) = \frac{n([i, r])}{m([r])} \sum_{j \in 2^J} m([j, r]) = \frac{n([i, r])}{m([r])} m(\underbrace{\bigcup_{j \in 2^J} [j, r]}_{=[r]}) = n([i, r]),$$

ponieważ $m([r]) = n([r])$. Dalej mamy

$$\sum_{i \in 2^I, j \in 2^J, r \in 2^R} p([i, j, r]) = \sum_{i \in 2^I, r \in 2^R} n([i, r]) = 1.$$

Wobec tego funkcja p zadana w ten sposób jest miarą probabilistyczną, która rozszerza m i n . $\square$

Lemat 2.2.18. *Niech I będzie zbiorem skończonym. Jeżeli $m \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_I)$, to istnieje miara $\mu \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$, która przedłuża m .*

Dowód. Miara m jest miarą na skończonej algebrze Boole'a, więc jest zadana przez wartości na atomach, czyli zbiorach $[p]$, gdzie $p \in 2^I$. Niech $x_p \in [p]$. Definiujemy wtedy

$$\mu = \sum_{p \in 2^I} m(C_p) \delta_{x_p}.$$

$\square$

Wniosek 2.2.19. *Niech $I, J, R \subseteq \kappa$ będą parami rozłącznymi skończonymi zbiorami. Jeżeli $n \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_{I \cup R})$ oraz $m \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_{J \cup R})$ są takimi miarami, że $n \upharpoonright_{\mathcal{C}_R} = m \upharpoonright_{\mathcal{C}_R}$, to istnieje miara $\mu \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ rozszerzająca m i n .*

3. MIARY NA ZBIORACH OTWARTO-DOMKNIĘTYCH 2^{ω_1}

W tym rozdziale pokażemy, że przestrzenie $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ i $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$ nie są homeomorficzne dla nieprzeliczalnych κ . Wskażemy własność topologiczną, która będzie spełniona przez przestrzeń miar probabilistycznych, zaś nie będzie zachodziła w przypadku przestrzeni miar znakowanych.

Definicja 3.0.1. Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną. Niech $X_0 \subseteq X$ oraz $g \in X$. Powiemy, że (X_0, g) jest parą Alexandrowa w X , jeżeli

- (1) $g \notin X_0$,
- (2) X_0 jest nieprzeliczalną podprzestrzenią X ,
- (3) g jest jedynym punktem skupienia X_0 w X .

Nazwa tego pojęcia bierze się od uzwarcenia Alexandrowa, czyli jednopunktowego uzwarcenia przestrzeni lokalnie zwartej punktem w nieskończoności.

Definicja 3.0.2. Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną. Powiemy, że X ma własność $(*)$, gdy dowolne pary Alexandrowa (X_1, g) , (X_2, g) nie mogą być oddzielone zbiorami otwartymi, tzn. dla każdych otwartych U, V zachodzi

$$X_1 \subseteq U \wedge X_2 \subseteq V \implies U \cap V \neq \emptyset.$$

Zauważmy, że własność $(*)$ jest zachowywana przez homeomorfizmy, a zatem jest również zachowywana przez różnowartościowe odwzorowania ciągłe, które są homeomorfizmami na obraz. Łatwo pokazać, że zachowują tę własność również retrakcje.

Lemat 3.0.3. *Niech $i : Y \rightarrow X$ będzie różnowartościowym odwzorowaniem zwartej przestrzeni Y w X oraz niech $r : X \rightarrow Y$ będzie spełniało $r \circ i = id_Y$. Wtedy jeżeli X ma $(*)$, to Y ma $(*)$.*

Dowód. Niech $(A, g), (B, g)$ będą parami Alexandrowa w Y oraz niech U, V będą zbiorami otwartymi spełniającymi $A \subseteq U, B \subseteq V$. Wtedy $(i[A], i(g)), (i[B], i(g))$ są parami Alexandrowa w X . Ponadto, zbiory $r^{-1}[U], r^{-1}[V]$ są zbiorami otwartymi spełniającymi

$$i[A] \subseteq r^{-1}[U], \quad i[B] \subseteq r^{-1}[V].$$

Wynika to z faktu, że dla $a \in A$ zachodzi $r(i(a)) = a \in A \subseteq U$. Podobnie dla $b \in B$. Wobec tego, z własności $(*)$ przestrzeni X mamy

$$\emptyset \neq r^{-1}[U] \cap r^{-1}[V] = r^{-1}[U \cap V],$$

dlatego $U \cap V \neq \emptyset$. □

W dowodzie następnego twierdzenia wykorzystamy lemat Szanina o Δ -systemach. Przypominamy poniżej jego treść, dowód można znaleźć w monografii Jecha [6, 9.18].

Lemat 3.0.4. *Niech $\mathcal{F}$ będzie nieprzeliczalną rodziną skończonych zbiorów. Wtedy istnieje skończony zbiór r oraz nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, które tworzą Δ -system, to znaczy spełniają*

$$\forall A, B \in \mathcal{F}_0 \quad (A \neq B \implies A \cap B = r).$$

Twierdzenie 3.0.5. *Przestrzeń $[0, 1]^\kappa$ ma własności $(*)$ dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej κ .*

Dowód. Niech (X, g) będzie parą Alexandrowa w $[0, 1]^\kappa$. Niech $\varepsilon > 0$ oraz skończonego $K \subseteq \kappa$. Wtedy istnieje jedynie skończenie wiele elementów $x \in X$ takich, że

$$|x(\alpha) - g(\alpha)| > \varepsilon$$

dla pewnego $\alpha \in K$. W przeciwnym wypadku X miałby punkt skupienia inny niż g . Twierdzenie 3.0.5 wynika z następującego lematu.

Lemat 3.0.6. *Niech (X, g) będzie parą Alexandrowa w $[0, 1]^\kappa$ oraz niech U będzie takim zbiorem otwartym, że $X \subseteq U$. Wtedy istnieje otwarte otoczenie V punktu g takie, że U jest gęsty w V .*

Dowód lematu. Możemy bez straty ogólności założyć, że $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ oraz, że $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, gdzie

$$U_\alpha = \{y : \forall \xi \in K_\alpha \quad |x_\alpha(\xi) - y(\xi)| < \varepsilon_\alpha\}$$

dla pewnych $K_\alpha \in [\kappa]^{<\omega}$ oraz pewnych $\varepsilon_\alpha > 0$. Wtedy istnieje nieprzeliczany zbiór indeksów $I \subseteq \omega_1$, skończony zbiór $r \in [\kappa]^{<\omega}$ oraz liczba $\delta > 0$ taka, że spełnione są warunki:

- (1) $\delta < \varepsilon_\alpha$ dla $\alpha \in I$,
- (2) $\{K_\alpha : \alpha \in I\}$ jest Δ -systemem o korzeniu r ,
- (3) $|x_\alpha(\xi) - g(\xi)| < \frac{1}{2}\delta$ dla $\alpha \in I$ oraz $\xi \in r$.

Taką rodzinę możemy skonstruować w trzech krokach. Niech $\delta > 0$ będzie taką liczbą, że rodzina $I_0 = \{\alpha < \omega_1 : \varepsilon_\alpha > \delta\}$ jest nieprzeliczalna. Następnie korzystamy z lematu Szanina, żeby uzyskać nieprzeliczalny Δ -system i usuwamy z niego co najwyżej skończenie wiele elementów, które nie spełniają warunku (3) tej konstrukcji. Definiujemy teraz

$$V = \left\{ y : \forall \xi \in r \ |y(\xi) - g(\xi)| < \frac{1}{2}\delta \right\}.$$

Sprawdzamy, że tak zdefiniowane otoczenie g spełnia tezę lematu. Niech $V_0 \subseteq [0, 1]^\kappa$ będzie dowolnym zbiorem otwartym takim, że $V_0 \cap V \neq \emptyset$. Niech $y_0 \in V_0 \cap V$. Bez straty ogólności możemy założyć, że

$$V_0 = \{y : \forall \xi \in J \ |y(\xi) - y_0(\xi)| < \varepsilon\}$$

dla pewnego skończonego zbioru $J \subseteq \kappa$ oraz liczby $\varepsilon > 0$. Istnieje indeks $\alpha \in I$ taki, że

$$(K_\alpha \setminus r) \cap (J \setminus r) = \emptyset.$$

Co więcej, dla $\xi \in r$ mamy szacowanie

$$|x_\alpha(\xi) - y_0(\xi)| \leq \underbrace{|x_\alpha(\xi) - g(\xi)|}_{< \delta/2} + \underbrace{|y_0(\xi) - g(\xi)|}_{\delta/2} < \delta < \varepsilon_\alpha.$$

Niech

$$t(\xi) = \begin{cases} y_0(\xi) & \text{dla } \xi \in J \cup r \\ x_\alpha(\xi) & \text{dla } \xi \in K_\alpha \setminus r \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy $t \in V_0 \cap U$. □

Żałómy, że $(X_1, g), (X_2, g)$ są parami Alexandrowa oraz $X_1 \subseteq U_1, X_2 \subseteq U_2$ będą zbiorami otwartymi. Na mocy lematu 3.0.6 istnieje otwarte otoczenie V punktu g takie, że U_1 jest gęsty w V . Ponadto $X_2 \setminus U$ jest co najwyżej skończonym zbiorem. Wobec tego

$$\emptyset \neq U_1 \cap U_2 \cap V \subseteq U_1 \cap U_2.$$

□

Teraz udowodnimy wprost, że $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ ma własność $(*)$ dla nieprzeliczalnych κ . Alternatywnie, można udowodnić to twierdzenie korzystając z twierdzenia [4, 4.2], opisanego w pracy Fedorchuka, z którego wnioskujemy, że $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^{\omega_1}))$ i $[0, 1]^{\omega_1}$ są homeomorficzne. Ten fakt jednak wykracza poza zakres tej pracy.

W dowodzie wykorzystamy analog lematu 3.0.6.

Lemat 3.0.7. *Niech (X, μ) będzie parą Alexandrowa w $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ dla nieprzeliczalnej liczby κ . Niech U będzie zbiorem otwartym zawierającym X . Wtedy istnieje skończony zbiór $r \subseteq \kappa$ taki, że U jest gęsty w zbiorze $\{\nu \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa)) : \nu \upharpoonright_{c_r} = \mu \upharpoonright_{c_r}\}$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$, $\varepsilon > 0$, a J niech będzie skończonym podzbiorem κ . Oznaczmy

$$N(\lambda, J, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa)) : \forall A \in \mathcal{C}_J |\lambda(A) - \nu(A)| < \varepsilon \right\}.$$

Możemy założyć bez straty ogólności, że $X = \{\mu_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ oraz

$$U = \bigcup_{\alpha < \omega_1} N(\mu_\alpha, K_\alpha, \varepsilon_\alpha)$$

Istnieje nieprzeliczalny zbiór $I \subseteq \omega_1$ oraz zbiór skończony r , które spełniają

- (1) $\{K_\alpha : \alpha \in I\}$ jest Δ -systemem o korzeniu r ,
- (2) $\mu_\alpha \restriction_{\mathcal{C}_r} = \mu \restriction_{\mathcal{C}_r}$.

Tak wybrany r spełnia tezę lematu. Niech

$$Z = \{\nu \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa)) : \nu \restriction_{\mathcal{C}_r} = \mu \restriction_{\mathcal{C}_r}\}$$

oraz niech V będzie zbiorem otwartym takim, że $Z \cap V \neq \emptyset$. Załóżmy, że $\nu \in Z \cap V$. Chcemy pokazać, że $V \cap U \neq \emptyset$. Wobec tego możemy założyć, że $V = N(\nu, L, \delta)$ dla pewnego zbioru skończonego L oraz liczby $\delta > 0$. Istnieje wtedy $\alpha \in I$ taki, że

$$(L \setminus r) \cap (K_\alpha \setminus r) = \emptyset.$$

Niech $n = \nu \restriction_{\mathcal{C}_{L \cup r}}$, $m = \mu_\alpha \restriction_{\mathcal{C}_{K_\alpha \cup r}}$. Miary m, n zgadzają się na $\mathcal{C}_r$, więc z wniosku 2.2.19 istnieje miara $\lambda \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$, która przedłuża m i n . Skoro λ przedłuża n , to $\lambda \in V$, a skoro zaś przedłuża m , to $\lambda \in N(m_\alpha, K_\alpha, \varepsilon_\alpha) \subseteq U$. $\square$

Twierdzenie 3.0.8. *Przestrzeń $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ ma własność $(*)$ dla dowolnego nieprzeliczalnego κ .*

Dowód. Niech $(X_1, \mu), (X_2, \mu)$ będą parami Alexandrowa w $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$. Niech U_1, U_2 będą otwartymi otoczeniami odpowiednio X_1 oraz X_2 . Z lematu 3.0.7 istnieje zbiór Z taki, że $\mu \in Z$ oraz U_1 jest gęsty w Z . Ponadto $X_2 \setminus Z$ jest co najwyżej przeliczalny. Wobec tego zbiór $U_2 \cap Z$ jest niepustym otwartym podzbiorem Z . Mamy zatem

$$\emptyset \neq U_1 \cap U_2 \cap Z \subseteq U_1 \cap U_2.$$

$\square$

Własność $(*)$ służy nam do odróżnienia przestrzeni miar probabilistycznych od przestrzeni miar znakowanych. W następnej części udowodnimy, że przestrzenie miar znakowanych nie posiadają tej własności. W tym celu posłużymy się pewnym lematem dotyczącym miary wewnętrznej. Dla ustalonego $\nu \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ definiujemy miarę wewnętrzną ν_* dowolnego zbioru

$$\nu_*(A) = \sup\{\nu(U) : U \subseteq A, U \in \text{Clop}(2^\kappa)\}.$$

Lemat 3.0.9. *Dla ustalonego otwartego $W \in \text{Clop}(2^\kappa)$ oraz liczby q zbiór*

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\mu|(W) > q\}$$

jest otwarty w $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$.

Dowód. Mamy

$$|\mu|(W) = \sup\{|\mu(V)| + |\mu(W \setminus V)| : V \subseteq W\}$$

. Wobec tego $|\mu|(X) > q$, gdy dla pewnego V mamy $|\mu(V)| + |\mu(W \setminus V)| > q$. Zauważmy, że odwzorowanie

$$\mu \mapsto |\mu(V)| + |\mu(W \setminus V)|$$

jest złożeniem ciągłych odwzorowań, zatem jest ciągłe. Z tego powodu zbiór

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\mu(V)| + |\mu(W \setminus V)| > q\}$$

jest zbiorem otwartym. Ostatecznie

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\mu|(W) > q\} = \bigcup_{V \subseteq W} \{\mu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\mu(V)| + |\mu(W \setminus V)| > q\}$$

jest zbiorem otwartym. $\square$

Wniosek 3.0.10. *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq 2^\kappa$ oraz liczby q zbiór*

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\mu|_*(A) > q\}$$

jest otwarty w $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$.

Dowód. Mamy

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\mu|_*(A) > q\} = \bigcup_{W \in \text{Clop}(2^\kappa) \cap P(A)} \{\nu \in \mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa)) : |\nu|(W) > q\}.$$

$\square$

Twierdzenie 3.0.11. *Przestrzeń $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$ nie ma własności $(*)$ dla dowolnego nieprzeliczalnego κ .*

Dowód. Zaczynamy od zdefiniowania dwóch par Alexandrowa w 2^κ . Niech

$$e_\alpha(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \alpha \neq \xi \\ 1 & \text{gdy } \alpha = \xi. \end{cases}$$

Ponadto niech $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ użyte w kontekście ciągów będą ciągami stałe równymi odpowiednio 0 i 1. Różnica oznacza różnicę punktową. Definiujemy

$$\begin{aligned} X_0 &= \{e_\alpha : \alpha < \kappa\} \\ X_1 &= \{\mathbf{1} - e_\alpha : \alpha < \kappa\} \end{aligned}$$

Wtedy $(X_0, \mathbf{0}), (X_1, \mathbf{1})$ są parami Alexandrowa. Dla każdego skończonego zbioru współrzędnych jedynie skończenie wiele elementów X_0 i X_1 różni się od odpowiednio $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Wobec tego istnieją rozłączne zbiory otwarto-domknięte U, V takie, że

$$X_0 \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq U, \quad X_1 \cup \{\mathbf{1}\} \subseteq V.$$

Teraz definiujemy rodziny miar

$$\begin{aligned} Y_0 &= \{(\delta_x - \delta_{\mathbf{0}})/2 : x \in X_0\}, \\ Y_1 &= \{(\delta_x - \delta_{\mathbf{1}})/2 : x \in X_1\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $(Y_0, \mu_0), (Y_1, \mu_0)$ są parami Alexandrowa, gdzie μ_0 oznacza miarę tożsamościowo równą 0. Pokażemy, że jedynym punktem skupienia Y_0 jest μ_0 . Ustalmy zbiór otwarto-domknięty $W \in \text{Clop}(2^\kappa)$. Mamy dwa przypadki:

- (1) Jeżeli $\mathbf{0} \in W$ to wtedy jedynie dla skończenie wielu $x \in X_0$ mamy $x \notin W$. Wobec tego dla jedynie skończenie wielu $x \in X_0$ zachodzi

$$(\delta_x - \delta_{\mathbf{0}})(W) \neq 0,$$

- (2) Jeżeli $\mathbf{0} \notin W$ to wtedy jedynie dla skończenie wielu $x \in X_0$ mamy $x \in W$. Wobec tego dla jedynie skończenie wielu $x \in X_0$ zachodzi

$$(\delta_x - \delta_0)(W) \neq 0.$$

Stąd wynika, że każdy punkt skupienia Y_0 musi się zerować na każdym zbiorze otwarto-domkniętym oraz, że μ_0 jest punktem skupienia. Wobec tego (Y_0, μ_0) jest parą Alexandrowa. Analogicznie możemy pokazać, że (Y_1, μ_0) jest parą Alexandrowa. Możemy rozdzielić zbiory Y_0, Y_1 zbiorami

$$Y_0 \subseteq \{\mu : |\mu|_*(U) > 3/4\}, \quad Y_1 \subseteq \{\mu : |\mu|_*(V) > 3/4\}.$$

Zbiory te są rozłączne, bo $|\mu|$ jest miarą probabilistyczną. Zawieranie zachodzi, ponieważ dowolne dwa punkty wewnątrz zbioru otwartego możemy oddzielić zbiorami otwarto-domkniętymi, które zawierają się w tym zbiorze otwartym. $\square$

Wniosek 3.0.12. *Przestrzeń $\mathcal{M}_1(\text{Clop}(2^\kappa))$ i $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ nie są homeomorficzne dla nieprzeliczalnych κ .*

4. RETRAKCJE NA PRZESTRZEŃ $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ DLA $\kappa \geq \omega_2$

W tym rozdziale zbadamy konsekwencje istnienia retrakcji na przestrzeń $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$. Tym problemem zajmowali się Ditor i Haydon w [2], którzy udowodnili twierdzenie, że przestrzeń $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ jest absolutnym retraktem wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa \leq \omega_1$. Skierujemy naszą uwagę na przypadek, gdy $\kappa > \omega_1$ (twierdzenie 4.0.6). Zaprezentujemy inną wersję dowodu Haydona i Ditora. Ponadto niewielka zmiana w przedstawionym rozumowaniu pozwala udowodnić również twierdzenie 4.0.10.

Definicja 4.0.1. Zwarta przestrzeń topologiczna X jest absolutnym retraktem, gdy dla każdego ciągłego zanurzenia $i : X \xrightarrow{1-1} Y$ w zwartą przestrzeń Y istnieje ciągłe odwzorowanie $r : Y \xrightarrow{na} X$ takie, że $r \circ i = id_X$.

Zacniemy od klasycznego przykładu przestrzeni, która jest absolutnym retraktem.

Twierdzenie 4.0.2. *Przestrzeń $[0, 1]^\kappa$ jest absolutnym retraktem dla każdego κ .*

Dowód. Niech $i : [0, 1]^\kappa \xrightarrow{1-1} Y$ będzie ciągłym zanurzeniem. Wtedy odwzorowanie

$$\pi_\alpha \circ i^{-1} : i[[0, 1]^\kappa] \xrightarrow{na} [0, 1]$$

przedłuża się do odwzorowania $r_\alpha : Y \xrightarrow{na} [0, 1]$ spełniającego $r_\alpha \circ i(f) = f(\alpha)$ dla $f \in [0, 1]^\kappa$. Wtedy odwzorowanie $\prod_{\alpha < \kappa} r_\alpha$, zadane wzorem

$$\prod_{\alpha < \kappa} r_\alpha(y)(\xi) = r_\xi(y)$$

dla $y \in Y$, jest retrakcją. $\square$

Definicja 4.0.3. Niech $f_1, f_2 \in [0, 1]^{\text{Clop}(2^\kappa)}$ oraz $I \subseteq \kappa$. Wtedy napiszemy, że $f_1 =_I f_2$, gdy $f_1 \upharpoonright_{C_I} = f_2 \upharpoonright_{C_I}$. Analogiczną relację definiujemy na $\mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$.

W dowodzie następnego twierdzenia skorzystamy ze znanej konsekwencji twierdzenia Stone'a-Weierstrassa.

Lemat 4.0.4. Niech zbiór $K \subseteq [0, 1]^I$ będzie zwarty oraz niech $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje przeliczalny zbiór $I_0 \subseteq I$, taki, że $f(x_1) = f(x_2)$ gdy $x_1 \upharpoonright_{I_0} = x_2 \upharpoonright_{I_0}$.

Dowód. Z twierdzenia Stone’a-Weierstassa rodzina

$$\{g \in C(K) : \exists S \subseteq I, |S| < \omega \text{ } g(x_1) = g(x_2) \text{ gdy } x_1 \upharpoonright_S = x_2 \upharpoonright_S\}$$

leży normowo gęsto w $C(K)$, ponieważ jest pierścieniem, zawiera wszystkie funkcje stałe oraz rozdziela punkty. Niech $\lim f_n = f$ oraz f_n zależy od S_n . Wtedy f zależy od $\bigcup_n S_n$. $\square$

Lemat 4.0.5. Niech zbiór $K \subseteq [0, 1]^{Clop(2^\kappa)}$ będzie zwarty oraz ϕ będzie ciągłym odwzorowaniem z K w przestrzeń topologiczną X . Wtedy dla pewnego $I \subseteq \kappa$ spełniającego $|I| \leq w(X)$ zachodzi

$$\forall f_1, f_2 \in K (f_1 =_I f_2 \implies \phi(f_1) = \phi(f_2)).$$

Dowód. Z lematu 4.0.4 wynika, że dla każdej funkcji $\theta : K \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje przeliczalny zbiór I_θ taki, że $f_1 =_{I_\theta} f_2$ pociąga $\theta(f_1) = \theta(f_2)$.

Niech $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ będzie rodziną mocy $w(X)$ funkcji rzeczywistych na X o tej własności, że dla każdych $x, y \in X$ spełniających $h(x) = h(y)$ dla wszystkich $h \in \mathcal{F}$ zachodzi $x = y$. Wtedy zbiór

$$I = \bigcup_{h \in \mathcal{F}} I_{C_h \circ \theta}$$

spełnia tezę. Jeżeli $f_1 =_I f_2$, to $f_1 =_{I_{h \circ \theta}} f_2$, więc $h(\theta(f_1)) = h(\theta(f_2))$ dla każdego $h \in \mathcal{F}$. $\square$

Twierdzenie 4.0.6. Przestrzeń $\mathcal{P}(Clop(2^\kappa))$ nie jest absolutnym retraktem dla $\kappa \geq \omega_2$.

Założmy nie wprost, że dla inkluzji przestrzeni $\mathcal{P}(Clop(2^\kappa))$ w $[0, 1]^{Clop(2^\kappa)}$ istnieje retrakcja $r : [0, 1]^{Clop(2^\kappa)} \xrightarrow{na} \mathcal{P}(Clop(2^\kappa))$. Używając tego oznaczenia sformułujemy i udowodnimy kilka technicznych lematów, które posłużą w dowodzie tego twierdzenia.

Definicja 4.0.7. Powiemy, że zbiór $I \subseteq \kappa$ jest zbiorem faktoryzującym (dla odwzorowania r), jeżeli $f_1 =_I f_2$ pociąga $r(f_1) =_I r(f_2)$.

Lemat 4.0.8. Dla dowolnego nieskończonego $I \subseteq \kappa$ istnieje zbiór faktoryzujący $I_\infty \subseteq \kappa$ taki, że $I \subseteq I_\infty$ oraz $|I| = |I_\infty|$.

Dowód. Definiujemy indukcyjnie rodzinę zbiorów $\{I_n\}_n$ spełniającą warunki

- (1) $I_0 = I$,
- (2) $|I_n| = |I_{n+1}|$,
- (3) $I_n \subseteq I_{n+1}$,
- (4) dla dowolnych $f_1, f_2 \in [0, 1]^{Clop(2^\kappa)}$ spełniających $f_1 =_{I_{n+1}} f_2$ mamy $r(f_1) =_{I_n} r(f_2)$.

Skonstruowawszy już zbiory $I_0, \dots, I_n$ zbiór I_{n+1} otrzymujemy z zastosowania lematu 4.0.5 do odwzorowania $\pi_{C_{I_n}} \circ r$.

Sprawdzamy teraz, że

$$I_\infty = \bigcup_n I_n$$

spełnia tezę. Ustalmy $f_1, f_2 \in [0, 1]^{Clop(2^\kappa)}$ takie, że $f_1 =_{I_\infty} f_2$ oraz ustalmy $A \in \mathcal{C}_{I_\infty}$. Wtedy z lematu 2.2.11 istnieje skończony $I' \subseteq I_\infty$ taki, że $A \sim I'$. Ponadto $I' \subseteq I_n$ dla każdego odpowiednio dużego n , a zatem z uwagi 2.2.4 zachodzi $A \sim I_n$ dla dużych n . W szczególności

dla pewnego N mamy $A \sim I_N$ oraz $A \sim I_{N+1}$. Funkcje f_1, f_2 spełniają $f_1 =_{I_{N+1}} f_2$, a zatem z definicji ciągu $\{I_n\}_n$ wnioskujemy, że $r(f_1) =_{I_N} r(f_2)$, a więc $r(f_1)(A) = r(f_2)(A)$. $\square$

W tym miejscu wykorzystujemy fakt, że $\kappa > \omega_1$. Istnieją dwa zbiory faktoryzujące I, J takie, że $I \setminus J, J \setminus I \neq \emptyset$ oraz $I \cap J$ jest nieskończony. Aby je skonstruować, bierzemy za I dowolny zbiór faktoryzujący mocy ω_1 . Następnie rozważmy J_0 taki, że $I \cap J_0$ jest przeliczalny oraz $J_0 \setminus I$ jest jednoelementowy. Lemat 4.0.8 daje nam przeliczalny zbiór faktoryzujący J rozszerzający J_0 . Tak zdefiniowane I, J spełniają powyższe założenia. Niech $i \in I \setminus J$ oraz $j \in J \setminus I$. Rozważmy zbiór

$$A = (C_i^0 \cap C_j^0) \cup (C_i^1 \cap C_j^1) \in \mathcal{C}_{I \cup J} \setminus (\mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J).$$

Lemat 4.0.9. *Istnieją $\mu, \nu_n \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ dla $n \in \mathbb{N}$ takie, że*

- (1) $\mu(A) > 0$,
- (2) $\lim_n \nu_n(B) = \mu(B)$ dla $B \in \mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J$,
- (3) dla każdego $\nu' \in \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ oraz $n \in \mathbb{N}$, jeżeli dla każdego $C \in \mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J$ zachodzi $\nu'(C) = \nu_n(C)$, to $\nu'(A) = 0$.

Dowód. Niech $\{d_n\}_n \subseteq 2^{I \cap J}$ będzie ciągiem zbieżnym do pewnego d , takim, że $d_n \neq d$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy $x^0, x_n^1, y^0, y^1 \in 2^\kappa$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} x^0(\alpha) &= \begin{cases} d(\alpha) & \text{dla } \alpha \in I \cap J \\ 1 & \text{dla } \alpha = i \\ 0 & \text{dla } \alpha = j \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} & x_n^1(\alpha) &= \begin{cases} d_n(\alpha) & \text{dla } \alpha \in I \cap J \\ 0 & \text{dla } \alpha = i \\ 1 & \text{dla } \alpha = j \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \\ y^0(\alpha) &= \begin{cases} d(\alpha) & \text{dla } \alpha \in I \cap J \\ 0 & \text{dla } \alpha = i \\ 0 & \text{dla } \alpha = j \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} & y^1(\alpha) &= \begin{cases} d(\alpha) & \text{dla } \alpha \in I \cap J \\ 1 & \text{dla } \alpha = i \\ 1 & \text{dla } \alpha = j \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definiujemy

$$\nu_n = \frac{1}{2}\delta_{x^0} + \frac{1}{2}\delta_{x_n^1}, \quad \mu = \frac{1}{2}\delta_{y^0} + \frac{1}{2}\delta_{y^1}.$$

Sprawdzimy, że te miary spełniają warunki z tezy lematu. Pierwszy warunek jest trywialnie spełniony. Ustalmy dowolne $B \in \mathcal{C}_I$. Dla odpowiednio dużych n zachodzi równoważność: $x \in B$ oraz $x \upharpoonright_{I \cap I} = d$, wtedy i tylko wtedy gdy $x' \in B$ gdzie x' zgadza się z x poza $I \cap J$ oraz $x' \upharpoonright_{I \cap J} = d_n$. Wobec tego z niezależności B od współrzędnej j wynika $\lim_n \nu_n(B) = \frac{1}{2}\delta_{y^0}(B) + \frac{1}{2}\delta_{y^1}(B) = \mu(B)$. Podobnie sprawdzamy to dla $B \in \mathcal{C}_J$. Aby sprawdzić trzeci warunek, ustalmy dowolne ν_n, ν' takie, że $\nu_n(C) = \nu'(C)$ dla każdego $C \in \mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J$. Niech $\alpha \in I \cap J$ będzie tą współrzędną, że $d_n(\alpha) \neq d(\alpha)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $d_n(\alpha) = 0, d(\alpha) = 1$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} A &= (C_i^0 \cap C_j^0) \cup (C_i^1 \cap C_j^1) = [(C_i^0 \cap C_j^0) \cup (C_i^1 \cap C_j^1)] \cap [C_\alpha^0 \cup C_\alpha^1] = \\ &= (C_i^0 \cap C_j^0 \cap C_\alpha^0) \cup (C_i^0 \cap C_j^0 \cap C_\alpha^1) \cup (C_i^1 \cap C_j^1 \cap C_\alpha^0) \cup (C_i^1 \cap C_j^1 \cap C_\alpha^1). \end{aligned}$$

Mamy $0 \leq \nu'(C_i^0 \cap C_j^0 \cap C_\alpha^0) \leq \nu'(C_j^0 \cap C_\alpha^0) = \nu_n(C_j^0 \cap C_\alpha^0) = 0$. Podobnie szacujemy wszystkie składniki A , co ostatecznie daje nam $\nu'(A) = 0$. $\square$

Dowód twierdzenia 4.0.6. Z lematu 4.0.9 wnioskujemy sprzeczność z istnieniem retrakcji. Niech A, ν_n, μ będą takie jak w jego treści. Definiujemy $x_n \in [0, 1]^{\text{Clop}(2^\kappa)}$ następująco

$$x_n(C) = \begin{cases} \nu_n(C) & \text{dla } C \in \mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J, \\ \mu(C) & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wtedy zachodzi $\lim_n x_n = \mu$. Ponieważ I, J są zbiorami faktoryzującymi, to oznacza to, że dla $C \in \mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J$ zachodzi

$$r(x_n)(C) = r(\mu_n)(C) = \mu_n(C).$$

Z lematu wynika zatem, że $x_n(A) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co oznacza, że

$$0 < \mu(A) = r(\mu)(A) = r(\lim_n x_n)(A) = [\lim_n r(x_n)](A) = \lim_n r(x_n)(A) = 0.$$

□

Możemy udowodnić inne twierdzenie lekko modyfikując to rozumowanie. Zauważmy, że definicja zbioru faktoryzującego ma sens dla miar $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_r(\text{Clop}(2^\kappa))$ oraz lemat 4.0.8 można przepisać zastępując $[0, 1]^{\text{Clop}(2^\kappa)}$ przez $\mathcal{M}_r(\text{Clop}(2^\kappa))$. Dlatego możemy w dalszym ciągu korzystać z tych samych oznaczeń.

Twierdzenie 4.0.10. *Nie istnieje retrakcja $r : \mathcal{M}_{\frac{3}{2}}(\text{Clop}(2^\kappa)) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Clop}(2^\kappa))$ dla $\kappa \geq \omega_2$.*

Dowód. Załóżmy, że taka retrakcja istnieje. Niech I, J będą zbiorami faktoryzującymi spełniającymi:

- (1) $I \cap J$ jest nieskończony,
- (2) $i \in I \setminus J$,
- (3) $j \in J \setminus I$.

Niech A, μ, ν_n będą zbiorem, oraz miarami takimi, jak w tezie lematu 4.0.9 zastosowanego dla zbiorów I, J . Niech t_n będzie ciągiem zbieżnym do t w $2^{I \cap J}$. Definiujemy

$$x_n(a, b, c)(\xi) = \begin{cases} a & \text{gdy } \xi = i, \\ b & \text{gdy } \xi = j, \\ (1 - c)t_n(\xi) + ct(\xi) & \text{gdy } \xi \in I \cap J, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Definiujemy ciąg miar znakowanych

$$\tau_n = \frac{1}{2}\delta_{x_n(0,1,1)} + \frac{1}{4}\delta_{x_n(1,0,0)} - \frac{1}{4}\delta_{x_n(0,0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{x_n(0,0,0)} + \frac{1}{4}\delta_{x_n(1,0,1)}.$$

Wystarczy sprawdzić, że dla $C \in \mathcal{C}_I \cup \mathcal{C}_J$ mamy $\tau_n(C) = \nu_n(C)$ oraz, że $\lim_n \tau_n = \mu$. Wtedy dostaniemy $r(\tau_n)(C) = \nu_n(C)$, co doprowadzi nas podobnie jak w twierdzeniu wyżej do sprzeczności

$$0 < \mu(A) = r(\mu) = r(\lim_n \tau_n)(A) = [\lim_n r(\tau_n)](A) = \lim_n r(\tau_n)(A) = 0.$$

Sprawdźmy najpierw zbieżność ciągu τ_n . Mamy

$$\lim_n \delta_{x_n(a,b,0)} = \lim_n \delta_{x_n(a,b,1)},$$

a zatem

$$\lim_n \tau_n = \frac{1}{2} \delta_{x_n(0,1,1)} + \frac{1}{2} \delta_{x_n(1,0,1)} = \mu.$$

Równość $\tau_n(C) = \nu_n(C)$ dla $C \in \mathcal{C}_I$ wynika z faktu, że jeżeli $x_n(a, b, c) \in C$, to wtedy $x_n(a, b', c) \in C$ dla dowolnych b, b' . Podobnie gdy $C \in \mathcal{C}_J$ mamy $x_n(a, b, c) \in C$ pociąga $x_n(a', b, c) \in C$ dla dowolnych a, a' . $\square$

LITERATURA

- [1] Bochner, S., Phillips, R. S., *Additive set functions and vector lattices*, „Annals of Mathematics” vol. 42 (1941), str. 316-324.
- [2] Ditor, S., Haydon, S., *On absolute retracts, $P(S)$, and complemented subspaces of $\mathcal{C}(\mathbf{D}^{\omega_1})$* , „Studia Mathematica” vol. 56 (1976), str. 243-251.
- [3] Engelking, R., *Topologia Ogólna*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa, 2007.
- [4] Fedorchuk, V. V., *Probability measures in topology*, „Russian Mathematical Surveys” vol. 46 (1991), str. 45–93.
- [5] Plebanek, G., *A survey on topological properties of $P(K)$ spaces*, „Japanese Journal of Mathematics” vol. 19 (2024), str. 143-180.
- [6] Jech, T. *Set theory- 3rd Millennium edition, revised and expanded*, Springer, Berlin, 2002.
- [7] Keller, O. H., *Die Homöomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum*, „Mathematische Annalen” vol. 105 (1931), str. 748-758.
- [8] Klee, V., *Some topological properties of convex sets*, „Transactions of the American Mathematical Society” vol. 198 (1955), str. 30-45.
- [9] Koppelberg, S. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1.*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [10] Yosida, K., Hewitt, E., *Finitely Additive Measures*, „Transactions of the American Mathematical Society” vol. 72 (1952), str. 46-66.