

4. Zadania

0.4.1 Obliczyć

- (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n)$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, n)$;
- (ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n, n+3)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+3)$;
- (iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n, 2n)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n - n^2, 1/n)$.

0.4.2 Dla ciągów zbiorów A_n z poprzedniego zadania obliczyć $\limsup_n A_n$ i $\liminf_n A_n$.

0.4.3 Zapisać przedział domknięty postaci $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jako przekrój ciągu przedziałów otwartych. Podobnie zapisać przedział otwarty (a, b) jako sumę przedziałów domkniętych.

0.4.4 Wykazać, że w powyższym zadaniu nie można zamienić miejscami określeń ‘otwarty’ i ‘domknięty’.

0.4.5 Zapisać trójkąt $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ jako sumę prostokątów. Zauważyć, że wystarczy wysumować przeliczalnie wiele prostokątów, aby taki trójkąt uzyskać.

0.4.6 Zauważyć, że $x \in \limsup_n A_n$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in A_n$ dla nieskończenie wielu n ; podobnie $x \in \liminf_n A_n \iff x \in A_n$ dla prawie wszystkich n .

0.4.7 Uzasadnić następujące zależności

- (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;
 - (ii) $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$, $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$;
 - (iii) $\liminf_n (A_n \cap B_n) = \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$;
 - (iv) $\liminf_n (A_n \cup B_n) \supseteq \liminf_n A_n \cup \liminf_n B_n$ i równość na ogół nie zachodzi.
- Zapisać zależności dla granicy górnej $\limsup$, analogiczne do (iii)–(iv).

0.4.8 Sprawdzić, że dla danego ciągu zbiorów A_n , przyjmując $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j < n} A_j$ dla $n > 1$, otrzymujemy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, przy czym zbiory B_n są parami rozłączne.

0.4.9 Udowodnić, że $\lim_n A_n = A \iff \lim_n (A_n \triangle A) = \emptyset$.

0.4.10 Wykazać, że każda rodzina parami rozłącznych przedziałów na prostej jest przeliczalna.

0.4.11 Niech $U \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. Dla $x, y \in U$ definiujemy $x \sim y$ jeśli istnieje przedział (a, b) , taki że $x, y \in (a, b) \subseteq U$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji są przedziałami otwartymi. Wywnioskować stąd i z zadania poprzedniego, że każdy otwarty podzbiór prostej jest sumą ciągu parami rozłącznych przedziałów.

0.4.12 Sprawdzić, że przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych jest otwarty.

5. Problemy

0.5.A Udowodnić następujący “warunek Cauchy’ego”: ciąg zbiorów A_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych ciągów liczb naturalnych $(n_i)_i$, $(k_i)_i$ rozbiegających do nieskończoności mamy $\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_{n_i} \triangle A_{k_i}) = \emptyset$.

0.5.B Udowodnić, że dowolny ciąg zbiorów $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ma podciąg zbieżny.

0.5.C Podać przykład ciągu $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, który nie ma podciągu zbieżnego. UWAGA: może być trudne; lepiej zastąpić $\mathbb{R}$ innym zbiorem tej samej mocy.

0.5.D Udowodnić, że jeśli F jest domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}$ to dla każdego ciągu $x_n \in F$ istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do pewnego $x \in F$.

WSKAZÓWKA: Aby $x \in F$ był granicą pewnego podciągu x_n potrzeba i wystarcza by dla każdego $\delta > 0$ w $(x - \delta, x + \delta)$ znajdowało się nieskończenie wiele wyrazów ciągu x_n . Przyjąć, że żaden $x \in F$ nie ma tej własności i zastosować Twierdzenie 0.3.5.

0.5.E Udowodnić, że moc zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest równa mocy zbioru $\mathbb{R}$.