

5. Zadania

2.5.1 Sprawdzić, że operacja przeciwobrazu zbioru przez funkcję zachowuje podstawowe operacje mnogościowe. Zauważyć, że

$$f\left[\bigcup_n A_n\right] = \bigcup_n f[A_n],$$

dla dowolnych zbiorów A_n z dziedziny funkcji f . Zauważmy, że inkluzja $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$ może być właściwa.

2.5.2 Niech $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych względem σ -ciała Σ . W każdym z podanych przykładów opisać warunek formułą logiczną, wykorzystującą tylko kwantyfikatory postaci $\forall n$ i $\exists k$.

- (i) ciąg $f_n(x)$ jest rosnący;
- (ii) $f_n(x) < 2$ dla wszystkich n ;
- (iii) $f_n(x) < 2$ dla prawie wszystkich n ;
- (iv) $f_n(x) < 2$ dla nieskończenie wielu n ;
- (v) $\sup_n f_n(x) \leq 2$;
- (vi) $\sup_n f_n(x) < 2$;
- (vii) ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny;
- (viii) $\limsup f_n(x) > \liminf f_n(x)$.

Na podstawie tych formuł, podać w każdym przykładzie wzór na zbiór x , dla których warunek jest spełniony.

2.5.3 Wykazać, że suma zbieżnego szeregu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

2.5.4 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie **dowolną** funkcją. Niech $F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \text{osc}_x(f) \geq \varepsilon\}$, gdzie $\text{osc}_x(f) \geq \varepsilon$ oznacza, że dla każdego $\delta > 0$ istnieją $x', x'' \in (x - \delta, x + \delta)$ takie że $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Sprawdzić, że zbiór F_ε jest domknięty. Wywnioskować stąd, że zbiór punktów ciągłości każdej funkcji jest borelowski.

2.5.5 Niech dla każdego t z pewnego zbioru T dana będzie funkcja ciągła $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję $h = \sup_{t \in T} f_t$. Wykazać, że h jest funkcją borelowską (nawet jeśli zbiór indeksów T jest nieprzeliczalny). W tym celu rozważyć zbiór postaci $\{x : h(x) > a\}$.

2.5.6 Sprawdzić, że każdą funkcję prostą, mierzalną względem σ -ciała $\Sigma \subseteq P(X)$ można zapisać w postaci

- (i) $\sum_{i \leq n} a_i \chi_{A_i}$, gdzie $A_i \in \Sigma$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$, oraz
- (ii) $\sum_{i \leq n} b_i \chi_{B_i}$, gdzie $B_i \in \Sigma$, a $B_1, \dots, B_n$ są parami rozłączne.

2.5.7 Sprawdzić, że rodzina funkcji prostych jest zamknięta na kombinacje liniowe, branie modułu i mnożenie.

2.5.8 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, tzn. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ dla pewnej stałej L . Pokazać, że $f[A]$ jest miary Lebesgue'a zero dla każdego A miary zero.

2.5.9 Wywnioskować z poprzedniego zadania, że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję spełniającą warunek Lipschitza jest mierzalny.

WSKAZÓWKA: $f[F]$ jest zwarty gdy f jest ciągła i $F \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty; zastosować Wniosek 1.6.3.

2.5.10 Wykazać, że w zadaniach 8 i 9 wystarczy zakładać, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza lokalnie, na każdym odcinku postaci $[-n, n]$, a więc w szczególności gdy f ma ciągłą pochodną.

2.5.11 Zauważyć, że dowolna funkcja niemalejąca $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest borelowska.

2.5.12 Skonstruować *funkcję schodkową Cantora* — niemalejącą funkcję ciągłą $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, taką że $g[C] = [0, 1]$, gdzie $C \subseteq [0, 1]$ jest trójkowym zbiorem Cantora.

WSKAZÓWKA: intuicyjnie rzecz biorąc, wystarczy położyć $g(x) = 1/2$ dla $x \in (1/3, 2/3)$; $g(x) = 1/4$ dla $x \in (1/9, 2/9)$, $g(x) = 3/4$ dla $x \in (7/9, 8/9)$ itd. Trzeba jednak trochę ten proces sformalizować, aby zademonstrować ciągłość.

2.5.13 Stosując funkcję g z poprzedniego zadania zauważyć, że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być mierzalny.

Sprawdzić też, że przeciwobraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być mierzalny. Tutaj warto rozważyć funkcję h , $h(x) = 1/2(x + g(x))$.

Następnie pogodzić te odkrycia z twierdzeniami i definicjami z rozdziału drugiego!

2.5.14 Zauważyć, że jeśli $\mu(X) < \infty$, a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór A , taki że $\mu(A) < \varepsilon$ i f jest ograniczona na $X \setminus A$.

2.5.15 Niech $|f_n| \leq M$, gdzie $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Sprawdzić, że $|f| \leq M$ prawie wszędzie.

2.5.16 Niech f_n będzie niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych, zbieżnych do f według miary. Udowodnić, że wtedy $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie.

2.5.17 Sprawdzić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$. Pokazać, że $f_n g_n \xrightarrow{\mu} f g$ przy dodatkowym założeniu, że f_n i g_n są wspólnie ograniczone przez stałą.

2.5.18 Niech μ będzie miarą skończoną. Wykazać, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oraz $f(x) \neq 0$ dla każdego x , to $1/f_n \xrightarrow{\mu} 1/f$.

2.5.19 Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n g_n \xrightarrow{\mu} f g$ (por. Zadanie 17). Pokazać, że założenie skończoności miary jest istotne.

6. Problemy

2.6.A Udowodnić, że na przestrzeni z miarą skończoną μ , zbieżność $f_n \xrightarrow{\mu} f$ jest równoważna stwierdzeniu

każdy podciąg f_{n_k} ma podciąg zbieżny prawie wszędzie.

Zauważyć, że ten fakt prowadzi to do innych dowodów w zadaniach typu 19.

2.6.B Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym miary Lebesgue'a skończonej. Udowodnić, że funkcja

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda(A \cap (x + A)),$$

jest ciągła (tutaj λ oznacza miarę Lebesgue'a, $x + A$ jest przesunięciem zbioru).

2.6.C Wykazać, że każda mierzalna w sensie Lebesgue’a funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ma następującą własność: Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła g , taka że

$$\lambda(\{x \in [0, 1] : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Wynioskować stąd, że istnieje ciąg funkcji ciągłych g_n zbieżny do f prawie wszędzie. W istocie można takie g_n wybrać klasy C^∞ .

WSKAZÓWKA: Zacząć od przypadku f ograniczonej. W sprawie funkcji gładkich: poszukać konstrukcji “gładkiego kapelusza”; patrz na przykład [Bump function](#)

2.6.D Wykazać, że nie istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zbieżny punktowo do funkcji $\chi_{\mathbb{Q}}$ (czyli funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbb{Q}$).

WSKAZÓWKA: I sposób: można przeprowadzić dowód nie wprost, wykorzystując jedynie własność Darboux. II sposób: udowodnić, że granica ciągu funkcji ciągłych musi mieć punkt ciągłości.

2.6.E Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie **dowolną** funkcją, spełniającą warunek $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla wszystkich x, y . Sprawdzić, że wtedy $f(x) = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$ ($a = f(1)$).

Udowodnić, że jeśli funkcja f jest mierzalna to f jest po prostu funkcją liniową, $f(x) = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2.6.F Niech μ i ν będą dwiema bezatomowymi miarami probabilistycznymi, określonymi na borelowskich podzbiorach $[0, 1]$. Udowodnić, że istnieje przedział $[a, b] \subseteq [0, 1]$, taki że

$$\mu([a, b]) = \nu([a, b]) = 1/2.$$

2.6.G Niech μ i ν będą dwiema bezatomowymi miarami probabilistycznymi, określonymi na pewnym σ -ciele Σ podzbiorów X . Udowodnić, że istnieje zbiór $A \in \Sigma$, taki że $\mu(A) = \nu(A) = 1/2$.

7. DODATEK: $\limsup a_n$ oraz $\liminf a_n$

Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Liczbę a nazywamy punktem skupienia ciągu jeśli istnieje podciąg ciągu (a_n) zbieżny do a . Podobnie definiujemy fakt, że ∞ lub $-\infty$ jest punktem skupienia ciągu. Przypomnijmy, że każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny (a więc ma punkt skupienia będący liczbą).

2.7.1 Pokazać, że zawsze istnieje najmniejszy punkt skupienia danego ciągu (będący liczbą bądź $-\infty, \infty$). Tę wielkość oznaczamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2.7.2 Zauważyć, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg (a_n) jest nieograczony z dołu.

2.7.3 Udowodnić, że $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ (gdzie a jest liczbą) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $a_n > a - \varepsilon$ dla prawie wszystkich n i $a_n < a + \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n .

2.7.4 Udowodnić, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$.

2.7.5 Sprawdzić, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$.

2.7.6 Zdefiniować analogiczne pojęcie $\limsup$ i zapisać jego podstawowe własności.

2.7.7 Zauważyć, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego granica górna jest równa dolnej i jest liczbą rzeczywistą.

2.7.8 $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ gdy $\lim a_n = a$.