

5. Zadania

3.5.1 Sprawdzić, że wzór

$$\int_X \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

jednoznacznie definiuje całkę z funkcji prostych całkowalnych na dowolnej przestrzeni (X, Σ, μ) .

WSKAZÓWKA: Jeżeli $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^k b_j \chi_{B_j}$ to istnieje skończona partycja X na zbiory mierzalne T_s , $1 \leq s \leq p$, takie że każdy zbiór A_i i każdy zbiór B_j jest sumą pewnych zbiorów T_s .

3.5.2 Niech $\mu(X) = 1$ i $\mu(A_i) \geq 1/2$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wykazać, że istnieje $x \in X$ należący do przynajmniej $n/2$ zbiorów A_i . W tym celu oszacować $\int_X \sum_{i \leq n} \chi_{A_i} d\mu$ (por. Problem 1.11.E).

3.5.3 Rozważyć funkcję $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$, aby zauważyć, że nie można w ogólnym przypadku zdefiniować całki $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ jako supremum z całek $\int s d\lambda$ po funkcjach prostych $s \leq f$. Zdefiniować podobną funkcję na $[0, 1]$.

3.5.4 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową, a $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcjami mierzalnymi. Sprawdzić że

- (i) jeśli $\int_A f d\mu = 0$ dla każdego $A \in \Sigma$, to $f = 0$ prawie wszędzie;
- (ii) jeśli f jest całkowalna na X , to jest też całkowalna na każdym $X_0 \in \Sigma$;
- (iii) jeśli $A, B \in \Sigma$ i $\mu(A \triangle B) = 0$, to $\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$ dla każdej f (oraz istnienie jednej z całek pociąga istnienie drugiej);
- (iv) $\int |f - g| d\mu \geq |\int f d\mu - \int g d\mu|$.

3.5.5 Ustalić, czy

- (i) iloczyn dwóch funkcji całkowalnych jest całkowalny;
- (ii) funkcja f , gdzie $f = 1$ prawie wszędzie jest całkowalna;
- (iii) f jest całkowalna jeśli jest całkowalna na każdym zbiorze miary skończonej.

3.5.6 Rozpatrzmy przestrzeń $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą, to znaczy $\mu(A) = |A|$ dla zbiorów skończonych i $\mu(A) = \infty$ dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ nieskończonego.

Udowodnić, że $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Zauważyć, że w tym przypadku całka jest sumą szeregu.

3.5.7 Czy istnieje ciąg funkcji całkowalnych, który jest

- (i) zbieżny prawie wszędzie, ale nie według miary;
- (ii) zbieżny wg miary ale nie prawie wszędzie;
- (iii) zbieżny prawie wszędzie, ale nieograniczony;
- (iv) zbieżny jednostajnie do zera i taki, że całki nie zbiegają do zera;
- (v) jest zbieżny jednostajnie do funkcji niecałkowalnej.

Przy każdym pytaniu rozważyć przypadek $\mu(X) < \infty$ i $\mu(X) = \infty$.

3.5.8 Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją borelowską. Zauważyć, że f jest całkowalna względem miary Lebesgue'a na $[a, b]$.

3.5.9 Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje odcinek $[a, b]$ taki że $\int_{[a, b]} |f| d\mu > \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu - \varepsilon$.

3.5.10 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją dla której istnieje skończona całka niewłaściwa Riemanna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Udowodnić, że f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wykazać, że założenie nieujemności funkcji jest istotne.

3.5.11 Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że funkcja mierzalna f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla zbiorów $A_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$ zachodzi warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.

3.5.12 Wykazać tzw. nierówność Czebyszewa: dla funkcji całkowalnej f zachodzi

$$\int |f| d\mu \geq \varepsilon \mu(\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}).$$

3.5.13 Wywnioskować z nierówności Czebyszewa, że

$$\text{jeżeli } \int |f - f_n| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{to} \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

3.5.14 Niech A_n będzie ciągiem zbiorów mierzalnych, takim że $\mu(A_n \triangle A_k) \rightarrow 0$ gdy $n, k \rightarrow \infty$. Wykazać, że istnieje mierzalny zbiór A , taki że $\mu(A \triangle A_n) \rightarrow 0$.

3.5.15 Zdefiniować funkcje ciągłe całkowalne $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, takie że $f_n \rightarrow 0$ prawie wszędzie, ale funkcja $\sup_n f_n$ nie jest całkowalna.

3.5.16 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Sprawdzić, że funkcja $F(x) = \int_{[0, x]} f(t) d\lambda(t)$ jest ciągła. Podać przykłady świadczące o tym, że F nie musi być różniczkowalna.

3.5.17 Zauważyć, że lemat Fatou nie jest prawdziwy bez założenia nieujemności funkcji. Zbadać, przy jakich założeniach o funkcjach zachodzi wzór

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n d\mu.$$

3.5.18 Niech (f_n) będzie takim ciągiem funkcji całkowalnych, że $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$. Udowodnić, że szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie i

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

3.5.19 Zbadać, czy wzór z poprzedniego zadania zachodzi dla szeregu funkcji $f_n(x) = x^{n-1} - 2x^{2n-1}$ na odcinku $(0, 1)$.

3.5.20 Zbadać, czy

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}} dx.$$

Jak można uogólnić ten przykład?

3.5.21 Niech μ będzie miarą skończoną na X ; $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi, takimi że $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Udowodnić, że jeśli $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h(f_n) d\mu = \int_X h(f) d\mu.$$

3.5.22 Niech f_n będzie ciągiem funkcji całkowalnych, zbieżnym do całkowalnej funkcji f prawie wszędzie. Udowodnić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\lambda = \int |f| d\lambda$.

WSKAZÓWKA: Lemat Fatou.

6. Problemy

3.6.A Mówimy, że przestrzeń miarowa (X, Σ, μ) jest *semiskończona* jeżeli

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma, B \subseteq A, \mu(B) < \infty\}.$$

Zauważyć, że każda przestrzeń σ -skończona jest semiskończona.

3.6.B Zauważyć że w definicji całki z funkcji nieujemnej na przestrzeni semiskończonej można liczyć supremum po funkcjach prostych całkowalnych. Sprawdzić, że twierdzenia graniczne dla całki zachodzą niezmiennie w formie dla przestrzeni semiskończonych.

3.6.C Udowodnić, że każda przestrzeń (X, Σ, μ) , która nie jest semiskończona, zawiera nieskończony atom miary, to znaczy zbiór $A \in \Sigma$, taki że $\mu(A) = \infty$ i $\mu(B) \in \{0, \infty\}$ dla każdego zbioru $B \subseteq A$ z σ -ciała Σ .

3.6.D Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary Lebesgue'a. Udowodnić, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła g , taka że $\int_{\mathbb{R}} |f - g| d\lambda < \varepsilon$.

3.6.E Udowodnić (wspomniane w tym rozdziale, klasyczne) twierdzenie: Ograniczona funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy gdy jej zbiór punktów nieciągłości jest mazy Lebesgue'a zero.

3.6.F Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary Lebesgue'a. Zbadać, czy dla każdego zbieżnego do zera ciągu $x_n \in \mathbb{R}$, oznaczając $f_n(x) = f(x + x_n)$, można stwierdzić, że ciąg f_n zbiega do f prawie wszędzie.

SUGESTIE: zapewne *tak*, gdy szereg $\sum_n x_n$ jest zbieżny; zapewne *nie* w przeciwnym przypadku (a kontrprzykład f jest funkcją charakterystyczną).