Lista 17: Okrąg.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 21.01.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

(1) Udowodnij, że jeśli proste ℓ_1 i ℓ_2 przechodzą przez punkt A spoza okręgu o i przecinają go w punktach B_1, C_1 (leżących na ℓ_1) i B_2, C_2 (leżących na ℓ_2), to
$$|AB_1||AC_1| = |AB_2||AC_2|.$$
Rozważ wszystkie możliwe położenia punktu A.

(2) Załóżmy, że prosta AB jest styczną do okręgu o w punkcie B, prosta ℓ_1 przechodzi przez A i przecina o w punktach B_1 i C_1. Udowodnij, że
$$|AB|^2 = |AB_1||AC_1|.$$

(3) Przy założeniach jak w poprzednim zadaniu udowodnij, że
$$|AB_1||AC_1| = |AO|^2 - r^2,$$
gdzie O jest środkiem okręgu o, a r jest promieniem okręgu o. Wyrażenie $|AO|^2 - r^2$ nazywa się (mądrze) **potęgą punktu** względem A. Użyteczność tej wielkości jest opisana w tym zadaniu i dwóch poprzednich.

(4) Dwa okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A, B. Udowodnij, że styczne do okręgów poprowadzone z punktów na prostej AB (spoza odcinka AB!) mają tę samą długość.

(5) Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do BC w punkcie D. Drugi okrąg jest styczny do półprostych AC, AB, rozłączny z trójkątem ABC i styczny do BC w punkcie D. Udowodnij, że $|BD| = |CE|$.

(6) Okręgi o_1 i o_2 opromieniach r i R są styczne zewnętrznie. Prosta ℓ jest styczna do obu okręgów w punktach A i B odpowiednio. Oblicz $|AB|$.

(7) Wykaż, że jeśli dwie cięciwy okręgu o połowią się nawzajem, to punkt ich przecięcia jest środkiem okręgu.

(8) Wykaż, że jeśli trzy cięciwy równej długości okręgu o mają punkt wspólny, to jest on środkiem okręgu.

(9) Niech PA i PB będą dwoma stycznymi do okręgu o o środku w O. Trzecia styczna przecina PA i PB w punktach X i Y odpowiednio. Uzasadnij, że kąt $\angle XOY$ nie zależy od trzeciej stycznej.

(10) Niech a, b, c będą bokami trójkąta prostokątnego. Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wyraża się wzorem $r_d = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Ile wynosi promień okręgu dopisanego do przeciwprostokątnej?

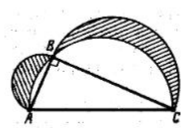
(11) Dwa okręgi przecinają się w punktach A, B. Niech MN będzie ich wspólną styczną (M, N-punkty styczności). Uzasadnij, że prosta AB dzieli MN na połowy.

(12) Przez punkt P leżącej na wspólnej cięciwie dwóch okręgów poprowadzono cięciwę KM pierwszego i cięciwę LN drugiego okręgu. Udowodnij, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

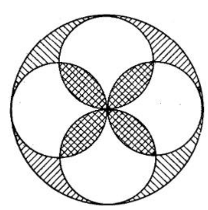
(13) Punkt C należy do cięciwy AB okręgu o. Okrąg o_1 jest styczny do prostej AB w punkcie c i przecina o w punktach P i Q. Udowodnij, że punkt przecięcia prostych AB i PQ nie zależy od wyboru o_1.

(14) Niech AB i CD będą wspólnymi stycznymi okręgów o_1 i o_2 (A, B, C, D to punkty styczności). Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ da się opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy o_1 i o_2 są styczne.

(15) Trójkąt na rysunku jest prostokątny. Uzasadnij, że pole zacieniowanego obszaru jest równe polu trójkąta.



(16) Udowodnij, że pole zakreskowanego obszaru jest równe polu zakratkowanego obszaru.



(17) Dwa okręgi są styczne w A, CD jest ich wspólną styczną (C, D-punkty styczności). Uzasadnij, że $|\angle COD| = \frac{\pi}{2}$.

(18) Okręgi o promieniach odpowiednio a, b, c są położone jak na rysunku. Udowodnij, że $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$.