Lista 5: Chińskie twierdzenie o resztach.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 15.10.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna/

(1) Skróć ułamki

$$\frac{19227}{19240},\ \frac{5365}{5336},\ \frac{193321}{193418}.$$

(2) (dla informatyków) Zapisz (np. w pseudokodzie albo dowolnym języku programowania) algorytm Euklidesa. Zasymuluj jego działanie dla $a = 30$ i $b = 75$.

(3) (dla informatyków) Zapisz (np. w pseudokodzie albo dowolnym języku programowania) rozszerzony algorytm Euklidesa. Pokaż, w jaki sposób go wykorzystać do znalezienia rozwiązania równania $5x + 8y = 1$ w liczbach całkowitych x, y.

(4) W jaki sposób wykorzystać poprzednie zadanie do znalezienia rozwiązań równania $5x + 8y = 3$?

(5) Dana jest liczba pierwsza p, a niepodzielne przez p i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij (elementarnie bez używania abstrakcyjnych pojęć pierścienia, odwrotności itp.), że istnieje taka liczba b, że

$$ab \equiv 1 \mod p^n.$$

Chińskie twierdzenie o resztach

Chińskie twierdzenie o resztach mówi, że jeśli liczby $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ są parami względnie pierwsze, to dla dowolnych liczb $y_1, y_2, \ldots, y_\ell$ układ kongruencji

$$x \equiv y_1 \mod n_1,$$
$$x \equiv y_2 \mod n_2,$$
$$\ldots$$
$$x \equiv y_\ell \mod n_\ell$$

ma **dokładnie jedno** rozwiązanie spełniające $1 \leqslant x \leqslant n_1 n_2 \ldots n_\ell$.

(6) Rozwiąż układ kongruencji

$$x \equiv 1 \mod 3,$$

$$x \equiv 2 \mod 10,$$

$$x \equiv 3 \mod 7.$$

Ogólniej, jak mając dany konkretny układ kongruencji najszybciej szukać rozwiązania ”na kartce” (tj. bez użycia komputera, gdy znalezienie rozwiązania będzie szybsze niż napisanie programu)?

(7) Rozważmy układ kongruencji

$$x \equiv 2 \mod 12,$$
$$x \equiv 3 \mod 15.$$

Uzasadnij, że nie ma on rozwiązania. Czy to jest sprzeczność z chińskim twierdzeniem o resztach?

(8) Chińskie twierdzenie o resztach w pewnych przypadkach da się stosować także do układów kongruencji wielu zmiennych. Rozwiąż układ

$$2x + 21y + z \equiv 1 \mod 9,$$
$$3x + y + 8z \equiv 1 \mod 7.$$

Czy rozwiązanie jest jedyne?

(9) Podaj przykład rozwiązania równania $x^3 + y^4 = z^5$. *Wskazówka:* $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

(10) Udowodnij, że istnieje 2019 kolejnych liczb naturalnych, spośród których każda jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej.

(11) Udowodnij, że istnieje 2019 kolejnych liczb naturalnych takich, że każda z nich ma co najmniej 2019 różnych dzielników pierwszych.

(12) Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą i niech k będzie dzielnikiem pierwszym liczby $p^2 - 2$. Udowodnij, że istnieje taka liczba m, że $m - 2019$ dzieli się przez k, a liczba $m - 14$ przez p.

(13) Rozwiąż układ kongruencji

$$x \equiv 0 \mod 1996,$$
$$x \equiv -6 \mod 1998,$$
$$x \equiv -4 \mod 2000,$$
$$x \equiv 0 \mod 2004.$$

Do tego układu nie zastosujesz bezpośrednio chińskiego twierdzenia o resztach, ale spróbuj coś z nim zrobić tak, żeby to było możliwe.

(14) Udowodnij, że równanie

$$x^{1996} + y^{1998} + z^{2000} = t^{2004}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. *Wskazówka:* Rozważ równość $2^6 + 2^4 + 2^0 = 3^4$. Przemnóż ją przez coś tak sprytnie dobranego, żeby skorzystać z poprzedniego zadania.