Lista 11^{11}: Pochodne cząstkowe.

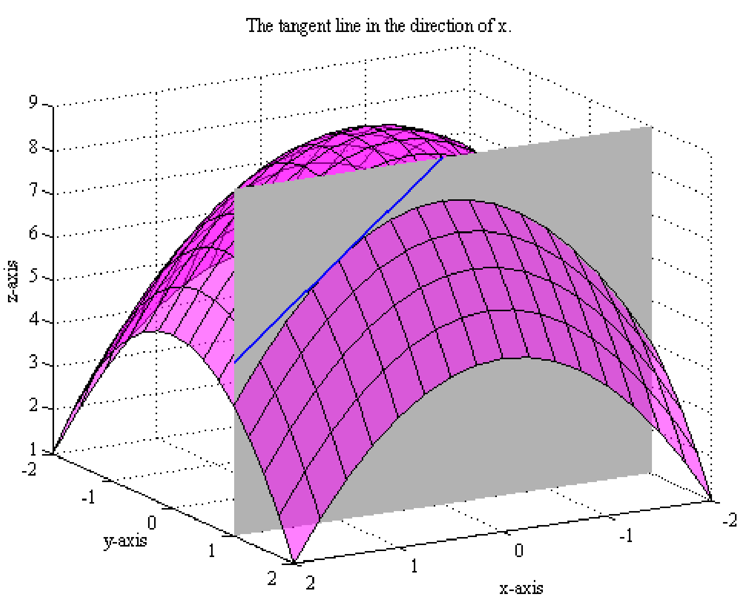
klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 25.11.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna/

Pochodne cząstkowe

Załóżmy, że mamy funkcję dwóch zmiennych $f(x, y)$ i chcielibyśmy badać, gdzie przyjmuje ona maksima i minima. Tutaj nie jesteśmy w stanie zdefiniować prostej stycznej do wykresu - ale możemy zdefiniować płaszczyznę styczną do wykresu i postąpić podobnie jak w przypadku jednowymiarowym - ekstremum jest tam, gdzie ta płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny oxy. To, czy taka płaszczyzna jest równoległa możemy badać następująco: weźmy punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i przeprowadźmy przez niego dwie płaszczyzny równoległe odpowiednio do oxz i oyz. Wykres funkcji (dwuwymiarowy) jest przecięty przez taką płaszczyznę wzdłuż wykresu funkcji jednej zmiennej, tj. to przecięcie wygląda jak funkcje $y \mapsto f(x_0, y)$ i $x \mapsto f(x, y_0)$ jednej zmiennej. Dla takich funkcji jednej zmiennej można liczyć pochodne jednowymiarowe, nazywa się je odpowiednio pochodnymi cząstkowymi $\partial_y f$ (bo ustalamy x_0 i liczymy pochodną po y) i $\partial_x f$. Czyli metoda liczenia pochodnych cząstkowych jest następująca: jedną ze zmiennych traktujemy jako parametr i różniczkujemy po drugiej, np. $\partial_x(x^2 + y^3 + xy) = 2x + y$, $\partial_y(x^2 + y^3 + xy) = 3y^2 + x$.



(1) Jak wyglądają wykresy funkcji:
  (a) $f(x,y) = x^2$,
  (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
  (c) $f(x,y) = 2x + 3y + 5$,
  (d) $f(x,y) = \sin(y)$,
  (e) $f(x,y) = \sin(y) + 5x$,
  (f) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$?
  Możesz się pobawić Wolframem Alpha.

(2) Podaj funkcję, tak, aby wykres wyglądał jak: wulkan, namiot igloo, dach dwuspadzisty, połowa powierzchni piłki do rugby. Możesz użyć komputera.

(3) Oblicz pochodne cząstkowe $\partial_x f$ i $\partial_y f$:
  (a) $f(x,y) = x^5y^7 + e^{xy}$,
  (b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$,
  (c) $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$,
  (d) $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$,
  (e) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$,
  (f) $f(x,y) = \cos(x^2 + 7y^3)$.

(4) **Gradient funkcji** to wektor $\Delta(f) = (\partial_x f, \partial_y)$. Oblicz gradienty funkcji $fx^2 + xy^4$, $e^{x^2+y^3}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+y}$.

(5) Znajdź kandydatów na ekstrema lokalne funkcji:
  (a) $e^{xy} - x$,
  (b) $x^3 + xy + y^3$,
  (c) $4(x-y) - x^2 - y^2$.

(6) Liczbę dodatnią przedstaw jako sumę trzech składników, których iloczyn jest najmniejszy możliwy.

(7) Pochodne cząstkowe wielowymiarowe różnią się tym od zwykłych, że trudniej jest sprawdzać ich zachowanie na brzegu zbioru. Ale to się da zrobić. Ale jeśli mamy szukać największej wartości funkcji $f(x,y)$ na zbiorze, który jest zadany równaniem $1 = g(x,y)$ (np.$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$, maksimum na okręgu), to wystarczy, że rozwiążemy następujący układ równań na 3 niewiadome (to się nazywa **metoda mnożników Lagrange'a**).

$$\begin{cases} \Delta f(x,y) = \lambda \Delta g(x,y), \\ g(x,y) = 1. \end{cases}$$

  Rozwiązania tego układu dadzą kandydatów na minimum i maksimum - później trzeba je wybrać. Użyj metody, aby znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji na zbiorze:
  (a) $f(x,y) = 5x - 3y$ na $x^2 + y^2 = 136$,
  (b) $f(x,y) = xy$ na $x + y = 1$,
  (c) $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$ na $x^2 + y^2 = 4$,
  (d) $f(x,y) = x + y$ na $x^2 + y^2 = 1$.