Lista 22: Grupy na przykładach

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 3.03.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

Grupa

Działaniem nazywamy operację przyporządkowującą parze elementów $a, b \in G$ element $c \in G$. Działanie będziemy oznaczali przez $a \circ b$ lub innymi symbolami (co będzie jasne z kontekstu). Zbiór z działaniem na jego elementach $(G, \circ)$ będziemy nazywać **grupą**, jeśli spełnia następujące warunki:

(1) działanie jest łączne, tj $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,
(2) istnieje element neutralny a, czyli taki, że $a \circ e = e \circ a = a$ dla dowolnego $a \in G$,
(3) każdy element a ma element odwrotny a^{-1}, tj. taki, który spełnia $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

(1) Rozstrzygnij, które z poniższych zbiorów z podanymi działaniami są grupami.
   (a) liczby naturalne z dodawaniem,
   (b) liczby naturalne z odejmowaniem,
   (c) liczby całkowite z dodawaniem,
   (d) liczby całkowite z odejmowaniem.

(2) Czy liczby rzeczywiste z dodawaniem tworzą grupę?

(3) Uzasadnij, że liczby rzeczywiste z mnożeniem nie tworzą grupy. Usuń z $\mathbb{R}$ jak najmniejszą liczbę elementów, żeby nowy zbiór z mnożeniem tworzył grupę. Taką grupę nazywa się $\mathbb{R}^*$.

(4) Powtórz poprzednie zadanie dla liczb zespolonych. Powstałą grupę nazywa się $\mathbb{C}^*$.

(5) Załóżmy, że mamy okrągły stół i rozważamy zbiór jego obrotów o różne kąty. Uzasadnij, że ten zbiór wraz z działaniem składania obrotów (tj. stosowaniem jednego, a później drugiego) tworzy grupę. Taką grupę oznacza się D^∞ i nazywa grupą dyhedralną.

(6) Uzasadnij, że zbiór liczb z przedziału $[0, 1]$ z działaniem $x \circ y = \{x + y\}$ (część ułamkowa) tworzy grupę. Znajdź związek z grupą poprzedniego zadania.

(7) Rozważamy liczby zespolone o module jeden. Zadaj na nich działanie w taki sposób, aby wyszła grupa która jest "taka sama" jak grupa dyhedralna.

(8) Uzasadnij, że zbiór liczb calkowitych modulo n z dodawaniem modulo n tworzy grupę. Taką grupę oznacza się przez $\mathbb{Z}_n$. Zrób tabelke działania dla $n = 4$.

(9) Dla których n zbiór liczb całkowitych modulo n tworzy grupę z działaniem mnożenia modulo n?

(10) **Grupa $GL(2, \mathbb{R})$.** Czy zbiór macierzy 2×2 z dodawaniem macierzy tworzy grupę? Usuń ze zbioru macierzy jak najmniejszą liczbę macierzy tak, aby nowy zbiór z działaniem mnożenia macierzy tworzył grupę.

(11) **Grupa $SL(2, \mathbb{R})$.** Uzasadnij, że zbiór macierzy 2×2 z mnozneim macierzy tworzy grupę.

(12) **Grupa S_3.** Uzasadnij, że zbiór izometrii płaszczyzny zachowujących dany trójkąt równoboczny tworzy grupę.

(13) **Grupa D_4.** Uzasadnij, że zbiór izometrii płaszczyzny zachowujących dany kwadrat tworzy grupę.

(14) **Grupa Kleina.** Sporządź tabelkę działań w grupie izometrii zachowujących dany prostokąt niebędący kwadratem.

(15) **Grupa $SO(2)$.** Czy zbiór izometrii płaszczyzny tworzy grupę? Czy zbiór symetrii osiowych względem wszystkich prostych na płaszczyźnie tworzy grupę?

(16) **Grupa S_n.** Uzasadnij, że zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem składania tworzy grupę. Zrób tabelkę dla $n = 3$. Znajdź związek z jednym z poprzednich zadań.

(17) **Grupa A_n.** Czy zbiór permutacji parzystych zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tworzy grupę? Czy zbiór permutacji nieparzystych zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tworzy grupę?

(18) Udowodnij, że zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ tworzy grupę.

(19) **Grupa Heisenberga.** Udowodnij, że zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tworzy grupę.

(20) **Kwaterniony** są używanym w fizyce uogólnieniem liczb zespolonych. Są to liczby postaci $ai + bj + ck + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i i, j, k są specjalnymi jednostkami urojonymi spełniającymi $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, $i^1 = j^2 = k^2 = -1$. Udowodnij, że kwaterniony tworzą grupę.

(21) Uzasadnij, że kwaterniony istnieją. Podpowiedź: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

(22) (trudne) Rozważamy zbiór wszystkich napisów złożonych z liter a, a^{-1}, b, b^{-1}. Działanie na napisach w_1, w_2 polega na sklejeniu ze sobą tych napisów do postaci $w_1 w_2$ i późniejszym "uproszczeniu ile się da", tj. jeśli mamy obok siebie literki typu np. aa^{-1}, to je skreślamy. Udowodnij, że działanie takie jest łączne. Powstałą grupę nazywa się **grupą wolną**.