Lista 23: Więcej o grupach

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 10.03.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

Izomorfizm grup

Mówimy, że dwie grupy $(G_1, \circ)$, $(G_2, \star)$ są **izomorficzne**, jeśli istnieje funkcja $f : G_1 \to G_2$ taka, że

(1) dla dowolnego elementu $h \in G_2$ istnieje element $g \in G_1$ taki, że $f(g) = h$,
(2) jeśli $f(g_1) = f(g_2)$, to musi być $g_1 = g_2$,
(3) dla dowolnych elementów $g_1, g_2 \in G_1$ zachodzi wzór

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \star f(g_2).$$

Własności (1) i (2) można sprawdzić szybciej uzasadniając, że istnieje funkcja f^{-1} - odwrotna do f.

(1) **Grupa S_3.** Uzasadnij, że zbiór izometrii płaszczyzny zachowujących dany trójkąt równoboczny tworzy grupę.

(2) **Grupa D_4.** Uzasadnij, że zbiór izometrii płaszczyzny zachowujących dany kwadrat tworzy grupę.

(3) **Grupa Kleina.** Sporządź tabelkę działań w grupie izometrii zachowujących dany prostokąt niebędący kwadratem.

(4) Udowodnij, że powyższa grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \circ)$, gdzie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, a działanie to $(a, b) \circ (c, d) = ((a + c) \bmod 2, (b + d) \bmod 2)$.

(5) Uzasadnij, że jeśli dwie grupy mają różną liczbę elementów, to nie mogą być izomorficzne. Czy grupa z powyższego zadania jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ (tj liczby modulo 4 z dodawaniem modulo 4)?

(6) **Grupa $SO(2)$.** Czy zbiór izometrii płaszczyzny tworzy grupę? Czy zbiór symetrii osiowych względem wszystkich prostych na płaszczyźnie tworzy grupę?

(7) **Grupa S_n.** Uzasadnij, że zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem składania tworzy grupę. Zrób tabelkę dla $n = 3$ i udowodnij, że grupa S_3 jest izomorficzna z grupą z pierwszego zadania (dlatego tak samo się nazywają).

(8) **Grupa A_n.** Czy zbiór permutacji parzystych zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tworzy grupę? Czy zbiór permutacji nieparzystych zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tworzy grupę?

(9) Podaj prostszą grupę izomorficzną z A_3.

(10) Ostatnio pokazaliśmy, że zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ tworzy grupę. Udowodnij formalnie, że jest ona izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.

(11) **Kwaterniony** są używanym w fizyce uogólnieniem liczb zespolonych. Są to liczby postaci $ai + bj + ck + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i i, j, k są specjalnymi jednostkami urojonymi spełniającymi $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, $i^1 = j^2 = k^2 = -1$. Udowodnij, że kwaterniony tworzą grupę.

(12) Uzasadnij, że kwaterniony istnieją (tj. zrealizuj grupę kwaternionów jako grupę konkretnych macierzy). Podpowiedź: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

(13) Niech G będzie zbiorem wszystkich podzbiorów liczb naturalnych, działanie jest zdefiniowane jako $A \circ B = A \cap B$. Czy $(G, \cap)$ tworzy grupę?

(14) Na zbiorze $\mathbb{R}$ określamy działanie

$$a \circ b = ab + a + b.$$

Udowodnij, że jest to działanie łączne. Czy $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą?

(15) Udowodnij, że grupy $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ są izomorficzne.

(16) Czy grupa liczb zespolonych z dodawaniem jest izomorficzna z grupą liczb rzeczywistych z dodawaniem?

(17) Niech $(\mathbb{Z}_n^*, \circ)$ będzie zbiorem liczb względnie pierwszych z n z działaniem mnożenia modulo n. Czy $(\mathbb{Z}_8^*, \circ_8)$ jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ (tj. liczby modulo 4 z dodawaniem modulo 4)?

(18) Ile jest grup (z dokładnością do izomorfizmu), które mają 2 elementy? 3 elementy? 4 elementy?

(19) Znajdź grupę $(G, \cdot)$, gdzie G ma być zbiorym 8 liczb zespolonych, $\cdot$ ma być mnożeniem liczb zespolonych, izomorficzną z grupą $(\mathbb{Z}_8, +_8)$.

(20) (problem) Jak opisać grupę permutacji kostki Rubika $2 \times 2 \times 2$? A $3 \times 3 \times 3$? Wymyśl jakiś sposób na policzenie liczby jej elementów i liczby możliwych ułożeń kostki. Na kolejnych lekcjach będziemy uczyli się liczyć podobne rzeczy przy użyciu grup.