Lista 0: Powtórzenie o indukcji. Zadania olimpijskie.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 10.09.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna/

Uwaga: Na mojej stronie znajdziesz odnośnik do strony z listami, sprawdzianami, ogłoszeniami i materiałami dodatkowymi do naszych lekcji. Materiały te są niezbędne do (porządnego) przygotowania się do olimpiady.

Indukcja matematyczna

Przypuśćmy, że mamy pewne zdanie $T(n)$, które mówi nam coś o liczbie naturalnej n, np. zdanie $T(n)$ może być równe:

- `"Dla liczby` n `mamy` $n > 2^n$`",`
- `"Dla liczby` n `zachodzi` $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$`",`
- `"Istnieją liczby naturalne` $a, b, c > 0$`, że` $a^n + b^n = c^n$`".`

Dowód indukcyjny przeprowadzamy w sytuacji, gdy bezpośrednie udowodnienie zdania $T(n)$ napotyka trudności, natomiast widzimy możliwość powiązania ze sobą zdań $T(n)$ i $T(n+1)$.

Podstawowy schemat dowodu indukcyjnego wygląda następująco:

(1) Sprawdzamy, że zdanie $T(1)$ jest prawdziwe.

(2) Dowodzimy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja
$$T(n) \Rightarrow T(n+1).$$

(3) Na podstawie (1) i (2) wyciągamy wniosek, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej n.

Rozgrzewka (powtórzenie z klasy I)

(1) Udowodnij indukcyjnie, że $n! > 2^n$ dla wszystkich $n > 4$.

(2) Niech $a_0 = 3$, $a_1 = 8$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Udowodnij, że
$$a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

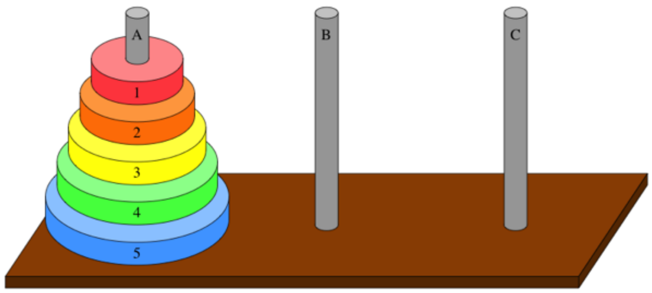
(3) Udowodnij, że liczba $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19 dla $n \geqslant 1$.

(4) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi
$$100n \leqslant 2^n + 572.$$

Uwaga: To zadanie wygląda na standardowe, ale tutaj jest pułapka - jeśli uda Ci się ją znaleźć, wyjaśnij kolegom na czym polega.

(5) Niech $x_0 = 1$, $x_n = \sqrt{2x_{n-1} + 1}$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnij, że $x_n < 4$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(6) (Wieże z Hanoi) Dany jest zestaw trzech kołków oraz n krążków, gdzie każdy z krążków jest różnej wielkości. Kołki nazwijmy A, B, C a krążki niech mają numery od 1 dla najmniejszego do n dla największego. Na początku wszystkie dyski są na kołku A, w kolejności malejącej od góry do dołu, tak że dysk n jest na dole a 1 na górze. Poniżej mamy rysunek jak wieże Hanoi wyglądają dla $n = 5$. Celem jest przeniesienie wszystkich n dysków z kołka A na kołek



B. Trzeba przestrzegać dwóch reguł.

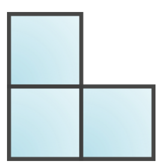
(a) Możesz przenieść tylko jeden dysk w jednym momencie.

(b) Żaden dysk nie może zostać na szczycie mniejszego. Na przykład, jeśli dysk 3 jest na kołku, wtedy wszystkie dyski poniżej muszą mieć numery większe od 3. Udowodnij, że zadanie da się rozwiązać w conajwyżej $2^n - 1$ ruchach.

Zadania konkursowe

(7) Niech $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to $x^n + \frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(8) Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ dowolna szachownica o wymiarach $2^n \times 2^n$ z której usunięto jedno pole może być pokryta klockami w kształcie jak na rysunku.



(9) Udowodnij, że

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2019 \cdot 2020} = \frac{2019}{2020}.$$

Możesz wykorzystać indukcję lub zgadnąć skąd ten wzór się bierze. Następnie dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wylicz

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}.$$

Podpowiedź: postaw hipotezę, następnie formalnie udowodnij indukcyjnie.

Zadania olimpijskie

(10) (OM, Kanada 1969) Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wzór (tj. bez znaku "$\sum$" i bez trzech kropek) na $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$.

(11) (OM LXVII, I etap, zadanie 1) Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym kroku zmazujemy liczbę n napisaną na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli liczba n jest parzysta, to piszemy liczbę $\frac{n}{2}$. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to wybieramy jedną z liczb $3n+1$, $3n-1$ i piszemy na tablicy. Czy – niezależnie od tego, jaką liczbę napisano na tablicy na początku – możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę.

(12) (OM LXVI, I etap, zadanie 2) Dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s < 2n.$$

Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, s\}$ jest sumą pewnych spośród $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(13) (OM LXII, I etap, zadanie 4) Dana jest liczba naturalna k. Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż 3^k elementów, można wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór S o następującej własności.

Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $A, B \subseteq S$ suma wszystkich elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru B. (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0.)