LISTA 9: PRAKTYCZNE LICZENIE POCHODNYCH.

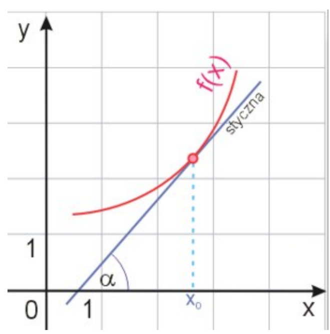
klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 12.11.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna/

Definicja pochodnej

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 to współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu w punkcie x_0. Współczynnik kierunkowy ten mierzy jak szybkość wzrostu funkcji. Oznacza się to jako $f'(x_0)$.



(1) Wywnioskuj z powyższej definicji jaka jest pochodna funkcji $f(x) = 5$ w punkcie $x_0 = 6$ i funkcji $g(x) = 4x+2$ w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu narysuj wykres tych funkcji.

(2) Dana jest funkcja $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ o dziedzinie $(-1, 1)$. Narysuj wykres (jaki ma kształt?). Jaka jest pochodna h w punkcie $x_0 = \sqrt{2}/2$? A $x_0 = 1/2$?

(3) Pochodne jakich jeszcze innych funkcji umiesz policzyć bez żadnych wzorów algebraicznych czy definicji granicy? Łatwo podasz nieskończenie wiele takich funkcji, ale czy umiesz wymyślić jeszcze jakieś istotnie inne niż w poprzednich zadaniach.

(4) Dana jest funkcja f. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leżące na wykresie. Jaka ta prosta ma współczynnik kierunkowy?

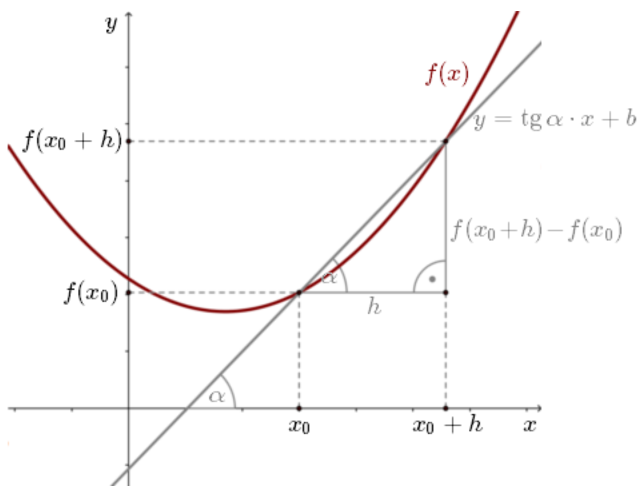
(5) Załóżmy, że funkcja jest rosnąca. Jaki znak może mieć pochodna w dowolnym punkcie? A jeśli jest malejąca? Czy zachodzi też odwrotna zależność, tj. czy jeśli $f'(x_0)$ jest dodatnie dla $x_0 \in (a, b)$, to funkcja jest rosnąca? Spróbuj uzasadnić to na rysunku.

Definicja pochodnej

Bardzo często mając wykres funkcji (np. parabolę lub hiperbolę) nie umiemy bezpośrednio napisać równania stycznej w x_0. W tym celu próbujemy narysować styczną w sposób przybliżony, tj. bierzemy $(x_0, f(x_0))$, małe h i rysujemy prostą przechodzącą przez $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+h, f(x_0+h))$. Procedura jest przedstawiona na rysunku. Teraz możemy zauważyć, że biorąc malutkie h narysowana prosta coraz bardziej przypomina styczną. Operację "brania coraz mniejszego h" nazywa się operacją brania granicy i oznacza $\lim_{h\to 0}$ ("lim" pochodzi od łacińskiego limes, $h \to 0$ oznacza, że bierzemy coraz to mniejsze h, prawie równe 0). To, że takie sieczne wykresu coraz bardziej przypominają styczną zapisuje się formalnie jako

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

Zauważ, że wyrażenie pod granicą oznacza współczynnik kierunkowy siecznej wykresu.



(11) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$ z definicji. *Wskazówka: wstaw do definicji i rozpisz ze wzoru skróconego mnożenia.* Jaki będzie wynik dla dowolnego x_0?

(12) Poprzednie zadanie dla $f(x) = 3 + 5x^3$. Tym razem skorzystaj z ogólnego wzoru skróconego mnożenia.

(13) Poprzednie zadanie dla x^n dla dowolnego naturalnego n. Użyj ogólnego wzoru skróconego mnożenia.

(14) Poprzednie zadanie dla x^{-1}. Czy taki sam dowód działa dla $n \in \mathbb{Z}$ ujemnego?

(15) Poprzednie zadanie dla $\sqrt{x}$. Użyj metody "usuwania niewymierności z mianownika". Jak przypuszczasz, jak wygląda $f'(x)$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Twoje przypuszczenie jest słuszne dla dowolnego a, nawet zespolonego!

(16) Na fizyce często się używa przybliżenia $\sin(h) \sim h$ dla bardzo małych h. Użyj tego przybliżenia aby policzyć pochodną $f(x) = \sin(x)$. Poza tym przybliżeniem wzór na sinus sumy może być przydatny.

(17) Uzasadnij, że
   (a) jeśli $g(x) = cf(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, to $g'(x) = cf'(x)$, spróbuj to zrobić z definicji,
   (b) jeśli $h(x) = f(x) \pm g(x)$, to $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

(18) Użyj poprzedniego zadania do policzenia pochodnych funkcji
   (a) $4 + 16x^2 + 7x^8$,
   (b) $15\sin(x) - x^{-2}$,
   (c) $x/2 + 2x^{-1}$,
   (d) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

(19) **(ważne!)** Niech $h(x) = f(x)g(x)$. Uzasadnij, że

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Powyższy wzór nazywa się regułą Leibniza. *Wskazówka: napisz definicje i w niej zauważ, że*

$$f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0) = f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0).$$

(20) Oblicz pochodne korzystając z reguły Leibniza (możesz użyć tablic dla pochodnych, których wzorów nie liczyłeś/aś).
   (a) $(x^3 + 2x)e^x$,
   (b) $\sqrt{x}e^x$,
   (c) $\log(x)x^2 + 15x$.

(21) **(ważne)**Taką samą metodą jak w zadaniu (19) można wyprowadzić następującą regułę różniczkowania dla $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (potrafisz to zrobić?):

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Użyj tej reguły wraz z regułą Leibniza do policzenia pochodnych następujących funkcji
   (a) $\frac{x}{x+1}$,
   (b) $\frac{x^3}{e^x+5}$,
   (c) $\frac{12e^x}{\sin(x)+\cos(x)}$,
   (d) $\frac{x\sin(x)}{1+x^3}$,
   (e) $\frac{8+15\log(x)}{\sin(x)+14}$,
   (f) $\frac{1}{\sqrt{x}+4}$.

(22) **(ważne)** Uzasadnij wzór na pochodną złożenia (lub z angielskiego *chain rule*), tj. jeśli mamy $h(x) = f(g(x))$, to

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)).$$

Wskazówka: Zapisz

$$\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

(23) Użyj reguły łańcucha do policzenia pochodnych następujących funkcji
(a) $(x^2+1)^{70}$,
(b) $\sin(5x)$,
(c) $\cos(x^2)$,
(d) e^{x^2},
(e) $(x^2+5x^4+7)^{45}$,
(f) $\sin(\sin(x))$,
(g) $e^{4x}+x^6$,
(h) $78\frac{1}{\sin(50x)}$,
(i) $8\sin(4x)^{13}$,
(j) $\sqrt{4+x^4}$,
(k) $e^{1-\cos(x)}$,
(l) $x^6\sqrt{x^2+5}$.

Zadania trudniejsze dla osób znających pochodne.

(24) Znajdź liczbę różnych pierwiastków równania $f(f(x))=0$ dla $f(x)=x^3-3x+1$.
(25) Niech f będzie funkcją odwrotną do $x^3/3+2x$. Podaj wartości $f''(15)$, $f''(88/3)$.
(26) Znajdź funkcje f spełniają $f'(x)=-(f(x))^N$ dla $N\in\mathbb{N}$ i $f(1)=5$. To jest przykład tzw. równania różniczkowego.
(27) Znajdź funkcję f spełniającą $f(0)=1$ i

$$xf'(x)=-4f(x)+6x^8$$

(28) Znajdź funkcję spełniającą $f(1)=4$ i

$$x^6f(x)+f'(x)=0.$$

(29) Znajdź funkcję spełniającą $f(4)=1$ oraz

$$f'(x)+xf(x)=x.$$

Wskazówka: użyj funkcji $e^{x^2/2}$.