Lista 21: Macierze i ich różne interpretacje

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 25.02.2020r.

`http://math.uni.wroc.pl/~hejna`

Macierze - nakładanie na wektor

Na tej liście punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ będziemy oznaczać przez $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (inna notacja). Macierz jest to tablica liczb, macierze 2×2 będziemy oznaczać przez $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Macierze odpowiadają pewnym specjalnym przekształceniom płaszczyzny. Wzór przekształcenia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest następujacy

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

(1) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Nałóż macierz na następujące wektory: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Powtórz dla macierzy $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(2) Niech $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Nałóż macierz na wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy to operacja, która dwóm macierzom A, B przyporządkowuje trzecią macierz C, będącą nazywaną iloczynem AB. Geometrycznie odpowiada to składaniu pewnych przekształceń płaszczyzny.

(3) Oblicz AB, AC i BC dla macierzy z zadania 1.

(4) Rozstrzygnij, czy mnożenie macierzy jest przemienne, tj. czy dla każdych dwóch macierzy 2×2 mamy $AB = BA$.

(5) Załóżmy, że $ad - bc \neq 0$. Mając daną macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ znajdź macierz B taką, że $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Taką macierz nazywa się macierzą odwrotną do A i jest oznaczana A^{-1}.

(6) Stosując wzór z poprzedniego zadania znajdź macierz odwrotną do $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

(7) Oblicz $A^{-1}B$ dla macierzy z zadania 1.

(8) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Oblicz ABC i CB.

Diagonalizacja macierzy

Diagonalizacja macierzy to procedura, która pozwala nam na szybkie i efektowne podnoszenie macierzy do wysokich potęg.

(10) Zdiagonalizuj podane macierze: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(11) Udowodnij, że jeśli $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1}$ dla pewnej macierzy przejścia P, to $A^n = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} P^{-1}$.

Diagonalizacja a rekurencje liniowe

Sprytne wykorzystanie macierzy i jej diagonalizacji pozwala nam na automatyczne rozwiązywanie rekurencji liniowych (jako metoda alternatywna do funkcji tworzących).

(13) Wyprowadź wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego według planu: Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Udowodnij indukcyjnie, że $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$. Zdiagonalizuj macierz A i skorzystaj z zadania 11.

(14) Jak zmieniłby się schemat poprzedniego zadania gdybyśmy zmodyfikowali ciąg Fibonacciego w ten sposób, że $f_0 = 6$, $f_1 = 8$?

(15) Powyższą metodą rozwiąż rekurencje
- (a) $a_0 = 1, a_1 = 5$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$,
- (b) $b_0 = 2$, $b_1 = -1$, $b_{n+1} = 7a_n - 10b_{n-1}$,
- (c) $c_0 = 2$, $c_1 = -1$, $c_{n+1} = -c_n + 6c_{n-1}$,
- (d) $d_0 = 2$, $d_1 = -1$, $d_{n+1} = 9d_n - 20d_{n-1}$.

Odpowiadające przekształcenia płaszczyzny

Macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ odpowiada przekształceniu liniowemu T płaszczyzny, które jest dane wzorem

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Np. macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ odpowiada symetrii osiowej względem osi OX. Mnożenie macierzy odpowiada składaniu przekształceń (czasami łatwiej wymnożyć niż coś zrozumieć geometrycznie, a czasami na odwrót).

(17) Jakiemu przekształceniu płaszczyzny odpowiadają macierze $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

(18) Napisz macierz, która odpowiada symetrii osiowej względem prostej $y = 2x$ i równania obrotu wokół środka układu współrzędnych o $\frac{\pi}{3}$. *Wskazówka: czasem warto popatrzeć, na co muszą przejść punkty* $(0, 1)$ *i* $(1, 0)$.

(19) Napisz macierz obrotu o kąt α względem środka układu współrzędnych.

(20) Wiadomo, że przekształcenie T jest izometrią płaszczyzny i odpowiadająca macierz ma wektor własny $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ odpowiadający wartości własnej $\lambda = 1$. Jakim przekształceniem jest T? Co gdyby było $\lambda = -1$?

(21) Wiadomo, że T jest symetrią osiową. Jakie ma wektory własne? Z jakimi wartościami własnymi?

(22) Dla jakich kątów α macierz symetrii o kąt α może mieć rzeczywiste wartości własne?

(23) Wyrażenie $ad - bc$ nazywa się **wyznacznikiem** macierzy 2×2. Udowodnij, że wyznacznik iloczynu macierzy jest iloczynem wyznaczników mnożonych macierzy.

(24) Jak używać poprzedniego zadania aby szybko powiedzieć, czy macierz izometrii jest macierzą obrotu czy macierzą symetrii osiowej?

(25) Używając macierzy udowodnij, że złożenie dwóch symetrii osiowych jest obrotem. O jaki kąt?

(26) Poprzednie zadanie może Ci się wydawać przekombinowane (po co stosować skomplikowane macierze do dowodzenia faktów z geometrii elementarnej?). Jeśli tak uważasz, to spróbuj sprawdzić np. czym jest złożenie symetrii względem płaszczyzny $x + y + z = 0$ i płaszczyzny $x + 2x + 3z = 0$. Powtórz dla złożenia symetrii względem płaszczyzny $x + y = 0$ i obrotu o kąt $\frac{\pi}{3}$ względej prostej $x + z = 0$, $y + 2z = 0$, a później w $\mathbb{R}^n$:)