Lista 16: Metoda środka masy.

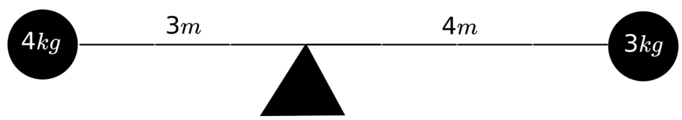
klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 3.12.2019r.

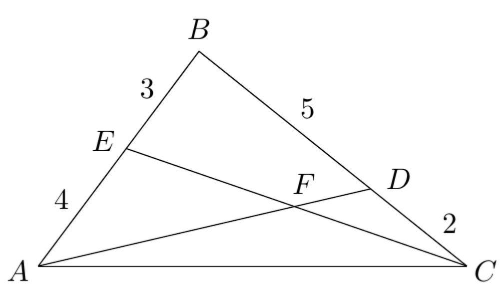
http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

Wprowadzenie

Załóżmy, że mamy dany lekki pręt o długości 7 m, na jego końcach są umieszczone ciężary o masach 3 kg i 4 kg i chcemy wiedzieć, w którym miejscu należy podeprzeć pręt, aby zachował równowagę (taki punkt nazywa się **środkiem masy**). Jest to proste zadanie z fizyki: go podeprzeć w takim puncie, żeby długości jego końców x, y sumowały się do 7 m, tj. $x + y = 7$, oraz $4 \times x = 3 \times y$. Rozwiązanie zadania jest na rysunku. Załóżmy,że teraz nie mamy pręta z dwoma masami, ale trzy masy



(np. 3, 4 i 5 kg) umieszczone w wierzchołkach lekkiego trójkąta z blachy i chcemy znaleźć miejsce, w którym ten trójkąt należy podeprzeć, aby zachował równowagę. Zadanie można rozwiązań następująco: weźmy masy w wierzchołkach A, B (np. 3 i 4 kg) i zastąpmy je sumą mas, tj. 7 kg umieszczoną w środku masy odcinka AB, tj. umieszczoną w puncie wyznaczonym jak wyżej (tak jakby AB był powyższym prętem), niech to będzie punkt D. Następnie możemy wziąć masę 7 kg w punkcie D i 5 kg w C, środek masy całego trójkąta to środek masy odcinka CD. Ten sam środek otrzymalibyśmy, gdybyśmy najpierw znaleźli środek masy odcinka BC (tj. kolejność punktów nie ma znaczenia). **Metoda środka ciężkości** została wymyślona (na potrzeby olimpiady) przez licealistów z USA i jest czymś pośrednim między geometrią elementarną a analityczną (współrzędne barycentryczne), dobrze się sprawdza w zadaniach olimpijskich (w realnych zastosowaniach na drugim etapie!), gdzie jest mowa o wielokątach i stosunkach długości (też w stereometrii!!!). Polega ona na odpowiednim umieszczeniu mas w wierzchołkach figury tak, aby pewne punkty dane w zadaniu okazały się środkami masy. Podamy przykład zastosowania: załóżmy, że interesuje nas stosunek $|EF|/|FC|$ w trójkącie na rysunku.



Rozwiązanie

Przypiszemy wierzchołkom trójkąta takie masy, aby F był środkiem masy całego trójkąta. Umieśćmy w B masę 2 kg, w C masę 5 kg. Wtedy D jest środkiem masy odcinka BC. Jeśli teraz umieścimy w A masę $3/2$, to E jest środkiem masy odcinka AB. Wtedy z metody wyznaczania środka masy trójkąta musi on się znajdować zarówno na AD, jak i na CE, czyli musi być punktem F. Zatem zastąpmy masy w A i B masą $3/2+2 = 7/2$ w E. Wtedy F musi być środkiem masy odcinka EC, gdzie w C jest masa 5, a w E masa $7/2$. Czyli z metody wyznaczania środka ciężkości ("równoważenie wagi") mamy (masa C) $\times |EF| =$ (masa E) $\times |FC|$, czyli szukany stosunek wyznaczamy z równania $5|EF| = 7/2|FC|$.

Zadania

(1) (Rozgrzewka) W którym miescu należy podeprzeć 10-metrowy pręt z masami 3 kg i 7 kg na końcach tak, aby była zachowana równowaga?

(2) (Rozgrzewka) W wierzchołkach trójkąta równobocznego umieszczono masy 1, 2 i 3 kg. Zaprezentuj (rysunkowo) jak należy znaleźć środek ciężkości takiego trójkąta.

(3) Wyznacz stosunek $|AF| : |FD|$ dla trójkąta z przykładu (powtórz powyższe rozwiązanie).

(4) W trójkącie ABC punkt D jest środkiem AB, punkt E leży na AC i spełnia $|AE| : |EC| = 1 : 2$. Niech G będzie punktem przecięcia AD i BE. Wyznacz stosunek GE i GB.

(5) Przy pomocy metody środka masy udowodnij, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku $2 : 1$. *Wskazówka: umieść w każdym wierzchołku masę 1 kg.*

(6) Udowodnij, że w czworościanie odcinki łączące wierzchołek z punktem przecięcia się środkowych przeciwległej ściany przecinają się w jednym punkcie. W jakim stosunku się dzielą? *Wskazówka: jeśli w zadaniu jest więcej punktów, możesz stosować metodę "zastępowania" dwóch przez sumę mas w środku ciężkości odcinka.*

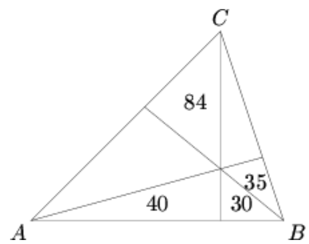
(7) Przy pomocy metody środka masy udowodnij twierdzenie Cevy, tj. jeśli na bokach AB, BC, CA trójkąta mamy punkty F, D i E odpowiednio oraz odcinki AD, BE i FC przecinają się w jednym punkcie, to

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|CD|}\frac{|CE|}{|AE|} = 1.$$

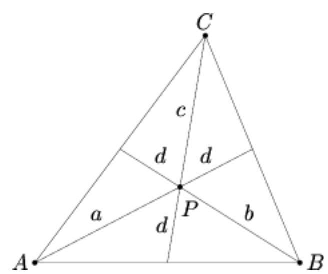
Wskazówka: Umieść w A masę 1 kg. Dobierz takie masy B i C aby punkt przecięcia wszystkich odcinków był środkiem masy. Ale wtedy także D jest środkiem masy odcinka BC - wykorzystaj to.

(8) (Twierdzenie Varignona) Udowodnij, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok. *Wskazówka: Wystarczy, że udowodnisz, że przekątne siłę połowią. W tym celu umieść w wierzchołkach równoległoboku masy 1 kg i znajdź środek masy czworokąta: najpierw znajdując środki masy* E_1, E_2 *odcinków* AB *i* CD *i biorąc środek masy* E_1E_2 *jako środek masy czworokąta.*

(9) Sytuacja jest jak na rysunku. Znajdź pole $\triangle ABC$.



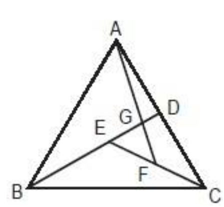
(10) Załóżmy, że znamy $a+b+c$ i d. Znajdź abc (sytuacja jak na rysunku poniżej).



(11) (bez użycia metody środka masy) Udowodnij, że dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok proporcjonalne do długości pozostałych boków.

(12) W trójkącie ABC mamy $|AB| = \frac{20}{11}|AC|$, dwusieczna kąta przy A przecina BC w punkcie D, niech M będzie środkiem AD, P niech będzie punktem przecięcia BM i AC. Znajdź stosunek $AP : CP$.

(13) W trójkącie jak na rysunku mamy $|AD| : |DC| = 1 : 2$, $|BE| : |ED| = 1 : 2$ oraz $|EF| = |FC|$. Znajdź stosunek pola trójkąta EFG do pola trójkąta ABC.



(14) Udowodnij, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek ciężkości czworościanu i środek kuli wpisanej leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, ACD i BCD są równe.