LISTA 1: NIERÓWNOŚCI ELEMENTARNE.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 17.09.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna/

Nierówności

Nierówności mówią, że jedno wyrażenie jest mniejsze od drugiego. Najprostszym przykładem jest $x^2 \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wbrew pozorom ma ona bardzo poważne konsekwencje, np. $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, co powstaje z nierówności $(a-b)^2 \geqslant 0$. Bardzo często (jak zobaczymy w poniższych zadaniach) do dowodzenia nierówności nie trzeba posiadać rozległej wiedzy, wystarczą umiejętności rachunkowe.

(1) Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ dla dodatnich a, b, c.

(2) Udowodnij, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant ab + bc + cd + da$$

dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d. Jak uogólnić tę nierówność na większą liczbę liczb?

(3) Udowodnij, że $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ dla dowolnego $x > 0$.

(4) Udowodnij, że $\frac{ab}{a^2+4b^2} \leqslant \frac{1}{4}$ dla dowolnych liczb dodatnich a, b. Jaką największą wartość może osiągać wyrażenie $\frac{ab}{4a^2+9b^2}$ dla dodatnich a, b?

(5) Jaką największą wartość może osiągać iloczyn dwóch liczb dodatnich o sumie 1?

(6) Liczby dodatnie u, v spełniają warunek $v + u = 2$. Udowodnij, że

$$u^2v^2(u^2 + v^2) \leqslant 2.$$

(7) Udowodnij, że dla dodatnich a, b, c, d zachodzi

$$(a + b + c + d)^2 \geqslant 4(ab + bc + cd + da).$$

(8) Udowodnij nierówność

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(9) Załóżmy, że $a < t < b$. Udowodnij, że $t^2 + ab < (a + b)t$.

(10) Niech $a, b, c \geqslant 0$. Czy może się zdarzyć, że wszystkie spośród liczb $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ są liczbami ujemnymi?

(11) Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(12) Iloczyn liczb $t_1, t_2, \ldots, t_n$ wynosi 1. Udowodnij, że

$$(1+t_1)(1+t_2) \cdot \ldots \cdot (1+t_n) \geqslant 2^n.$$

(13) Udowodnij, że jeśli dwie liczby rzeczywiste a, b różnią się o mniej niż 1, to ich części całkowite różnią się co nie więcej niż 1.