Zadanie domowe 9: Niezmienniki.

klasa II B, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 4.02.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna/XIV.html

Niezmienniki

Spotyka się czasem zadanie o następującym szkielecie: mamy dany pewien układ wyjściowy, pewną operację, którą możemy zmieniać ten układ i układ końcowy, do którego mamy dojść. Niestety, najczęściej zadanie nie tyle każą nam przejść od układu początkowego do końcowego, tylko pytają czy jest to możliwe... Są więc dwie możliwości - albo się da (wtedy pokazujemy jak to zrobić) albo próbujemy i próbujemy i próbujemy i... przekonujemy się, że nie da rady. Co wtedy? Jak pokazać, że coś nie jest możliwe? Wtedy z pomocą przychodzi nam metoda niezmienników. Niezmiennikiem jest pewna specjalnie dobrana wielkość, która opisuje każdy z powstających kolejno układów tak, żeby nie zmieniała się przy naszej operacji. I teraz: jeśli dodatkowo nasza wielkość (” niezmiennik ”) jest różna dla sytuacji początkowej i końcowej, to mamy już gotowe uzasadnienie dlaczego nie da się przejść od sytuacji wyjściowej do końcowej! Przykładowymi niezmiennikami są: iloczyn pewnych liczb, parzystość liczby obiektów w pewnej grupie, reszty z dzielenia przez pewne liczby. Oczywiście główna trudność leży we wskazaniu takiego niezmiennika, który jest zachowywany przy naszych operacjach i rozróżnia wyjściowa sytuację od docelowej.

(1) Mamy do dyspozycji baniak o pojemności 12 litrów i butelkę 3-litrową. Czy przy pomocy tych naczyń da się odmierzyć 4 litry wody?

(2) Mamy 1 kawałek papieru. W każdym ruchu możemy wybrać kartkę i porwać ją na dokładnie 4 części. Czy w ten sposób da się uzyskać dokładnie 2018 kartek papieru?

(3) Rozważmy liczbę 2018!. Obliczamy jej sumę cyfr, potem sumę cyfr powstałej liczby i tak dalej aż otrzymamy liczbę 1-cyfrową. Jaka ona będzie?

(4) Na tablicy są wypisane liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6$. W każdym kroku możemy zwiększyć dwie z nich o 1. Czy postępując w ten sposób da się uzyskać 6 takich samych liczb na tablicy?

(5) Smok ma 200 głów. Potrafi zadawać 4 rodzaje ciosów:
   (a) 45 obcina, 33 odrasta,
   (b) 21 odcina i nic nie odrasta,
   (c) 17 ścina, 14 odrasta,
   (d) (pechowy) odcina jedną, 349 odrasta.

   Czy rycerz jest w stanie pokonać smoka?

(6) Mamy 17 skarpetek żółtych, 15 zielonych i 13 niebieskich. W każdym ruchu możemy zamienić dwie skarpetki różnych kolorów na parę skarpetek w trzecim kolorze. Czy w ten sposób możemy dostać wszystkie skarpetki tych samych kolorów?

(7) Danych jest 25 liczb -1. W jednym ruchu wolno jednocześnie zamienić znak dowolnych dwóch sposód nich. Czy w ten sposób da się uzyskać 25 liczb 1?

(8) W szatni na wieszakach wisi 20 kurtek. Do szatni wchodzi 17 osób spośród których każda zdejmuje i wiesza kurtkę, lub zdejmuje swoją kurtkę z wieszaka, ubiera ją i wychodzi. Czy po wyjściu tych 17 osób na wieszakach może zostać dokładnie 10 kurtek?

(9) Zaba skacze po prostej. W n-tym skoku skacze o n cm w prawo lub lewo (kierunek wybiera sama). Czy po wykonaniu 57 skoków może znaleźć się w punkcie wyjścia?

(10) W kolejce czekają 3 osoby. Co pewien czas pewne sąsiednie osoby zamieniają się miejscami. Dowieść, że po parzystej liczbie zmian te osoby nie ustawią się w kolejności odwrotnej do początkowej kolejności.

(11) Dany jest 12-kąt foremny $A_1A_2\cdots A_{12}$. W wierzchołku A_1 stoi znak $+$, a w pozostałych wierzchołkach znak $-$. Ruch polega na wybraniu 6 kolejnych wierzchołków oraz na zmienie znaku stojącego w każdym z tych wierzchołków.Wykazać, że wielokrotne stosowanie tej operacji nie może doprowadzić do sytuacji, w której w wierzchołku A_2 będzie znak $+$ a w pozostałych $-$.

(12) Danych jest 15 liczb -1. Dopuszczalna operacja polega na zamienia znaku trzech liczb. Zbadać, czy wykoanien tej operacji parzystą liczbę razy może doprowadzić do 15 liczb 1.

(13) Dany jest trójmian kwadratowy x^2+6x+7. W każdym ruchu można zamienić x w trójmianie na $ax+b$ dla pewnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ i w ten sposób otrzymać nowy trójmian, np. jeśli wybierzemy $a = 2$ i $b = 1$ to otrzymamy trójmian $(2x+1)^2 + 6(2x+1)^2 + 7$. Czy wykonując taką operację wielokrotnie można doprowadzić do trójmianu $x^2 + 4x + 10$?

(14) Dany jest sześcian: w dwóch przeciwległych wierzchołkach pewnej ściany stoi liczba 1, a w pozostałych 6 wierzchołkach liczba 0. Ruch polega na wybraniu krawędzi i zwiększeniu o 1 liczb stojących w obu końcach krawędzi. Wykazać, że nie można w ten sposób otrzymać jednakowych liczb na wszystkich wierzchołkach sześcianu.

(15) Czy konik szachowy może przejść z wierzchołka szachownicy do wierzchołka przeciwnego będąc w każdym z pól dokładnie raz?