Lista 19: Powtórzenie przed olimpiadą - teoria liczb, nierówności, równania i kombinatoryka.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 27.01.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

Teoria liczb

(1) Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczby $14n+3$ i $21n+4$ są względnie pierwsze.

(2) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba n^2 jest podzielna przez $n+2$.

(3) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, m, że $2^m + 1 = n^2$.

(4) Liczby całkowite x, y spełniają równość $x^2 + 2y^2 = 2xy$. Wykazać, że $x = y = 0$.

(5) Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że jeśli mn dzieli liczbę $m^2 + n^2 + m$, to m jest kwadratem liczby całkowitej.

(6) Znajdź wszystkie liczby całkowite x, y, z dla których $x^2 + y^2 = 7z^2$.

(7) Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $n = p^2 - 3p + 3$. Wykazać, że liczba $2^n - n + 1$ jest podzielna przez p.

(8) Niech p-pierwsza. Udowodnij, że liczba $1^p+2^p+\ldots+(p-1)^p+p^p$ jest podzielna przez p^2 (jeśli nie umiesz dla p^2 to zrób chociaż dla podzielności przez p).

(9) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, m spełniające równanie $(n^2+m)(n+m^2) = (n-m)^3$.

(10) Udowodnij, że istnieje liczba całkowita mająca dokładnie 2000 dzielników pierwszych taka, że $2^n + 1$ jest podzielne przez n.

(11) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych a, b, c spełniających równanie

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{12}{a+b+c}.$$

Równania i nierówności

(1) Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^7}{b^2} + \frac{b^7}{c^2} + \frac{c^7}{a^2} \geqslant a^5 + b^5 + c^5.$$

Uwaga: jeśli w zadaniu korzystasz z jakiejś nietrywialnej nierówności musisz zaprezentować jej dowód i wytłumaczyć jak ją stosujesz.

(2) Udowodnij, że jeśli $x^3 + y^3 \leqslant 2xy$, to $x^9 + y^9 \leqslant 2$.

(3) Dana jest liczba dodatnia $a < 1$ i liczby całkowite $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Udowodnij, że zachodzi nierówność

$$(a^{k_1} + a^{k_2} + \ldots + a^{k_n})^2 \leqslant \frac{1+a}{1-a}(a^{2k_1} + a^{2k_2} + \ldots + a^{2k_n})$$

(4) Rozwiąż układ równań w liczbach nieujemnych

$$\begin{cases} y^3 = x^2 + x - 1 \\ z^3 = y^2 + y - 1 \\ x^3 = z^2 + z - 1. \end{cases}$$

(5) Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste spełniające równanie $8^x(3x+1) = 4$.

(6) Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

Kombinatoryka

(1) Udowodnij, że z dowolnego ciągu $n^2 + 3n$-wyrazowego można wybrać co najmniej n-elementowy podciąg monotoniczny.

(2) Kwadrat o boku 7 podzielono na kwadraty jednostkowe. Znaleźć najmniejszą liczbę kwadratów jednostkowych, które trzeba zaznaczyć, żeby nie można było znaleźć prostokąta o wymiarach 1×4 i złożonego z kwadratów jednostkowych, który nie zawierałby żadnego zaznaczonego kwadratu.

(3) W sześciu kratkach tabeli 4×4 narysowano gwiazdki. Udowodnić, że można wykreślić dwa wiersze i dwie kolumny tej tabeli w taki sposób, aby w niewykreślonych polach nie pozostały żadne gwiazdki.

(4) Punkt P leży wewnątrz pewnego wielościanu wypukłego. Udowodnić, że istnieje taka ściana wielościanu, dla której rzut prostokątny punktu P na płaszczyznę ściany znajduje się wewnątrz ściany.

(5) W prostokątnej tabeli złożonej z liczb rzeczywistych wolno zmienić znak wszystkich liczb w jednym wierszu albo wszystkich liczb w jednej kolumnie. Dowieść, że przez wielokrotne stosowanie tej operacji można otrzymać tabelę, w której sumy liczb w dowolnej kolumnie i w dowolnym wierszu są nieujemne.

(6) Na tablicy napisano parę $(5, 19)$. Jeśli na tablicy jest para (a, b), to można dopisać parę $(a+1, b+1)$ jeśli jest para (a, b) liczb parzystych, to można dopisać parę $(a/b, b/2)$ jeśli są pary (a, b) i (b, c), to można dopisać parę (a, c). Rozstrzygnąć, czy w ten sposób uda się otrzymać parę $(1, 100)$.