Lista 20: Powtórzenie przed olimpiadą - geometria.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 4.02.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

(1) Niech r - promień okręgu wpisanego w trójkąt, a, b, c - długości boków, h_1, h_2 - dwie dowolne wysokości. Udowodnij, że wtedy

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}.$$

(2) Danych jest 17 punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Każdą parę punktów połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Wykaż, że powstał trójkąt o bokach tego samego koloru.

(3) Dana jest liczba naturalna $n > 3$ oraz $k < n$. Udowodnij, że
   (a) Jeśli $k \leqslant \frac{n}{2}$, to każdy punkt zbioru da się połaczyć z co najmniej k innymi punktami tak, aby wśród poprowadzonych odcinków nie było boków tega samego trójkąta.
   (b) Jeśli $k > \frac{n}{2}$ i każdy punkt zbioru jest połączony z co najmniej k innymi punktami, to da wśród poprowadzonych odcinków istnieją trzy boki tego samego trójkąta.

(4) Danych jest n punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Wybrano n par punktów i połączono je odcinkami. Udowodnij, że powstała w ten sposób przynajmniej jedna łamana zamknięta.

(5) Czy istnieje wielościan mający dokładnie 7 krawędzi?

(6) Dwusieczna AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w P. Wykaż, że trójkąty ABP i BDP są podobne.

(7) W trójkącie ostrokątnym ABC jest spełniony warunek $2|\angle ABC| = |\angle ACB|$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $|\angle DAB| = 2|\angle ABC|$. Wykaż, że

$$\frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.$$

(8) Na boku BC trójkąta równobocznego ABC jako na średnicy zbudowano półokrąg (na zewnątrz). Punkty K i L dzielą ten półokrąg na trzy równe łuki. Wykaż, że proste AK i AL dzielą BC na trzy równe części.

(9) Dany jest trójkąt ABC w którym $|AC| + |BC| = 3|AB|$. Okrąg o środku I jest wpisany w ten trójkąt i jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi do punktów D i E względem punktu I. Udowodnij, że A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

(10) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB tego trójkąta, przy czym $|AC| < |BD|$. Punkt E jest symetryczny do A względem prostej CD. Wykaż, że
$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|BD| - |AD|}.$$
Wskazówka: rozważ punkt symetryczny do A względem D.

(11) Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O, przy czym
$$|AD| = |BE| = |CF|.$$
Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H. Pokaż, że
$$|\angle AOC| = |\angle GOH|.$$

(12) Dwa okręgi przecinają się w A i B przy czym pierwszy okrąg przechodzi przez środek drugiego. Styczna do pierwszego okręgu w B przecina drugi okrąg w C. Udowodnij, że $|AB| = |BC|$.

(13) Dwusieczna kąta $\angle BAC$ trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio B i C na prostą AD. Dowieść, że
$$|AD| \geqslant |KL| + |CL|.$$

(14) W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Udowodnij, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB poprowadzone z wierzchołków C, E, A przecinają się w jednym punkcie. *Wskazówka: spróbuj jednej z metod, której się kiedyś nauczyliśmy na lekcji.*

(15) Każdemu wierzchołkowi sześcianu przyporządkowano liczbę 1 lub -1, a każdej ścianie - iloczyn liczb przyporządkowanych wierzchołkom tej ściany. Wyznaczyć zbiór wartości, które może przyjąć suma 14 liczb przyporządkowanych ścianom i wierzchołkom. *Wskazówka: podobno kiedyś ktoś rozważył wszystkie 256 możliwości i dzięki temu został finalistą :)*

(16) Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i BC w punktach P i Q. Prosta PQ przecina dwusieczną $\angle BAC$ w punkcie S. Udowodnij, że dwusieczna ta jest prostopadła do prostej SC.