Zadanie 3a.

$f(x,y) = x^5y^7 + e^{xy}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x(x^5y^7) + \partial_x(e^{xy}) = 5x^4y^7 + ye^{xy}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y(x^5y^7) + \partial_y(e^{xy}) = 7x^5y^6 + xe^{xy}$

Zadanie 3b.

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Do policzenia pochodnych skorzystamy z reguły ilorazu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial_x(1)\cdot(x^2+y^2) - 1\cdot\partial_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0-1\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial_y(1)\cdot(x^2+y^2) - 1\cdot\partial_y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0-1\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Zadanie 3c.

$$f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$$

Do policzenia pochodnych skorzystamy z reguły łańcuchowej:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}\cdot\partial_x(x+y^2) = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}\cdot(1+0) = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}\cdot\partial_y(x+y^2) = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}\cdot(0+2y) = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$$

Zadanie 3d.

$$f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial_x(e^{xy}-1)\cdot x - (e^{xy}-1)\cdot\partial_x(x)}{x^2} = \frac{xye^{xy}-e^{xy}+1}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial_y(e^{xy}-1)\cdot x - (e^{xy}-1)\cdot\partial_y(x)}{x^2} = \frac{x^2e^{xy}-(e^{xy}-1)\cdot 0}{x^2} = e^{xy}$$

Zadanie 3e.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial_x(xy)\cdot(x^2+y^2) - xy\cdot\partial_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Analogicznie:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Zadanie 3f.

$$f(x,y) = \cos(x^2+7y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x^2+7y^3)\cdot\partial_x(x^2+7y^3) = -2x\sin(x^2+7y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x^2+7y^3)\cdot\partial_y(x^2+7y^3) = -21y^2\sin(x^2+7y^3)$$

Zadanie 4

1.

$$f(x,y) = x^2 + xy^4$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y^4 \\ 4xy^3 \end{bmatrix}$$

2.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2+y^3} \\ 3y^2e^{x^2+y^3} \end{bmatrix}$$

3.

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+y}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(x^{-1}) + \partial_x((x+y)^{-1}) \\ \partial_y(x^{-1}) + \partial_y((x+y)^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x+y)^2} \\ 0 + \frac{-1}{(x+y)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

Zadanie 5a.

$$f(x,y) = e^{xy} - x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$$

Aby punkt był kandydatem na ekstremum lokalne, wszystkie pochodne cząstkowe w tym punkcie muszą się zerować. W związku z tym piszemy układ równań:

$$\begin{cases} ye^{xy} - 1 = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ye^{xy} - 1 = 0 \\ e^{xy} = 0 \end{cases} \quad \vee\, x = 0$$

$$\begin{cases} y \cdot 0 - 1 = 0 \\ e^{xy} = 0 \end{cases} \quad \vee\, (x = 0 \implies y = 1)$$

$$\begin{cases} 0 = -1 \\ e^{xy} = 0 \end{cases} \quad \vee\, (x = 0 \implies y = 1)$$

Kandydat na ekstremum lokalne:

$$K_1 = (0, 1)$$

Zadanie 5b.

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ x = -3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27y^4 + y = 0 \\ x = -3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(27y^3 + 1) = 0 \\ x = -3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \vee 27y^3 + 1 = 0 \\ x = -3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \vee y^3 = -\frac{1}{27} \\ x = -3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \vee y = -\frac{1}{3} \\ x = 0 \vee x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Kandydaci na ekstrema lokalne:

$$K_1 = (0,0), K_2 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

Zadanie 5c.

$$f(x,y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4 - 2y$$

$$\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Kandydat na ekstremum lokalne:

$$K_1 = (2, -2)$$

Zadanie 6

Mamy daną liczbę $m = x + y + z$, chcemy zmaksymalizować iloczyn xyz. Weźmy funkcję tego iloczynu oraz poszukajmy dla niej maksimum:

$$p(x, y) = xy(m - x - y) = mxy - x^2y - xy^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = my - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = mx - x^2 - 2xy$$

$$\begin{cases} my - 2xy - y^2 = 0 \\ mx - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y^2 - my}{-2y} \vee (y = 0 \implies (x = 0 \vee x = m)) \\ mx - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{m-y}{2} \vee (y = 0 \implies (x = 0 \vee x = m)) \\ m\frac{m-y}{2} - (\frac{m-y}{2})^2 - 2 \cdot \frac{m-y}{2} \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{m-y}{2} \vee (y = 0 \implies (x = 0 \vee x = m)) \\ 2m^2 - 2my - m^2 + 2my - y^2 - 4my + 4y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{m-y}{2} \vee (y = 0 \implies (x = 0 \vee x = m)) \\ 3y^2 - 4my + m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_y = 16m^2 - 4 \cdot 3 \cdot m^2 = 4m^2$$

$$y_1 = \frac{4m + \sqrt{4m^2}}{2 \cdot 3} = \frac{6m}{6} = m \implies x = 0$$

$$y_2 = \frac{4m - \sqrt{4m^2}}{2 \cdot 3} = \frac{2m}{6} = \frac{m}{3} \implies x = \frac{m}{3}$$

Kandydaci na ekstrema lokalne:

$$K_1 = (0, 0), K_2 = (0, m), K_3 = (m, 0), K_4 = (\frac{m}{3}, \frac{m}{3})$$

Liczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = m - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = m - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2x$$

Z otrzymanych pochodnych tworzymy macierz:

$$M = \begin{bmatrix} p''_{xx} & p''_{xy} \\ p''_{yx} & p''_{yy} \end{bmatrix}$$

I obliczamy jej wyznacznik dla wszystkich punktów stacjonarnych:

$$W(K_1) = \begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - m \cdot m = -m^2$$

$$W(K_2) = \begin{vmatrix} -2m & -m \\ -m & 0 \end{vmatrix} = -2d \cdot 0 - m \cdot m = -m^2$$

$$W(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ -m & -2m \end{bmatrix} = 0 \cdot -2d - m \cdot m = -m^2$$

$$W(K_4) = \begin{bmatrix} \frac{-2m}{3} & \frac{-m}{3} \\ \frac{-m}{3} & \frac{-2m}{3} \end{bmatrix} = \frac{-2m}{3} \cdot \frac{-2m}{3} - \frac{-m}{3} \cdot \frac{-m}{3} = \frac{4m^2}{9} - \frac{m^2}{9} = \frac{m^2}{3}$$

Ponieważ $m \overset{\text{zał}}{>} 0$, to $W(K_1), W(K_2), W(K_3) < 0$, co oznacza, iż punkty K_1, K_2, K_3 nie są ekstrememi lokalnymi
Natomiast $W(K_4) > 0$, więc w punkcie K_4 mamy ekstremum lokalne.

$$\frac{\partial^2 p(\frac{m}{3}, \frac{m}{3})}{\partial x^2} = \frac{-2m}{3} \overset{\text{zał}}{<} 0$$

Co pokazuje, że w punkcie K_4 mamy maksimum lokalne, co kończy zadanie.

Zadanie 7a.

$$f(x, y) = 5x - 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = \lambda 2x \\ -3 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wyliczamy λ, a następnie przyrównujemy (przypadki gdy $x = 0 \vee y = 0$ omówimy później). Stąd mamy:

$$\frac{5}{2x} = \frac{-3}{2y}$$

$$10y = -6x$$

$$y = \frac{-6x}{10}$$

Podstawiamy do trzeciego równania:

$$x^2 + \frac{36x^2}{100} = 136$$

$$100x^2 + 36x^2 = 13600$$

$$136x^2 = 13600$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10 \vee x = -10$$

$$x = 10 \implies (y = 6 \vee y = -6)$$

$$x = -10 \implies (y = 6 \vee y = -6)$$

Dla $x = 0$ oraz $y = 0$ mamy sprzeczność odpowiednio w pierwszym oraz drugim równaniu:

$$5 = 0$$

$$-3 = 0$$

W takim razie nasi kandydaci na ekstrema:

$$K_1 = (10, 6), K_2 = (10, -6), K_3 = (-10, 6), K_4 = (-10, -6)$$

$$f(K_1) = 50 - 18 = 32$$

$$f(K_2) = 50 + 18 = 68$$

$$f(K_3) = -50 - 18 = -68$$

$$f(K_4) = -50 + 18 = -32$$

Maksimum jest osiągane dla $x = 10, y = -6$, a minimum dla $x = -10, y = 6$.

Zadanie 7b.

$$f(x, y) = xy$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$g(x, y) = x + y$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} = y$$

Funkcja ma maksimum oraz minimum dla argumentów $x = 0.5, y = 0.5$.

Zadanie 7c.

$$f(x,y) = 4x^2 + 10y^2$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 8x \\ 20y \end{bmatrix}$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 2\lambda x \\ 10y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wyliczamy λ, a następnie przyrównujemy (przypadki gdy $x = 0 \vee y = 0$ omówimy później). Stąd otrzymujemy sprzeczność:

$$\frac{8x}{2x} = \frac{10y}{2y}$$

$$4 = 5$$

Dla $x = 0$:

$$y^2 = 4$$

$$y = 2 \vee y = -2$$

Dla $y = 0$:

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Kandydaci na ekstrema:

$$K_1 = (0,2), K_2 = (0,-2), K_3 = (2,0), K_4 = (-2,0)$$

$$f(K_1) = 40$$

$$f(K_2) = 40$$

$$f(K_3) = 16$$

$$f(K_4) = 16$$

Maksimum jest osiągane dla $x = 0, y = 2$ oraz $x = 0, y = -2$, a minimum dla $x = 2, y = 0$ oraz $x = -2, y = 0$.

Zadanie 7d.

$$f(x,y) = x + y$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wyliczamy λ, a następnie przyrównujemy (przypadki gdy $x = 0 \vee y = 0$ omówimy później). Stąd mamy:

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2y}$$

$$2y = 2x$$

$$x = y$$

Podstawiamy do trzeciego równania:

$$2x^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \implies y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Dla $x = 0$:

$$y = 1 \vee y = -1$$

Dla $y = 0$:

$$x = 1 \vee x = -1$$

Kandydaci na ekstrema:

$$K_1 = (0,1), K_2(0,-1), K_3 = (1,0), K_4 = (-1,0), K_5 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), K_6 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$$

$$f(K_1) = f(K_3) = 1$$

$$f(K_2) = f(K_4) = -1$$

$$f(K_5) = \sqrt{2}$$

$$f(K_6) = -\sqrt{2}$$

Maksimum jest osiągane dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a minimum dla $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Grzegorz Suwaj