Zadanie domowe 7: próbny II etap OM.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 21.01.2020r.

`http://math.uni.wroc.pl/~hejna/`

Dzień pierwszy.

(1) Podczas konferencji matematycznej 2020 siedziało przy okrągłym stole, przy którym było 2020 krzeseł. Po przerwie obiadowej ci sami uczestnicy zmienili miejsca i zasiedli przy tym samym stole w sposoób losowy (żeby było ciekawiej). Udowodnij, że istnieją dwie osoby, które są przedzielone taką samą liczbą osób jak poprzednio.

(2) Załóżmy, że mamy dany ciąg liczb naturalnych spełniający warunki:
 (a) $a_1 = 1$,
 (b) $a_n < a_{n+1}$ dla każdego n naturalnego,
 (c) $a_{n+1} \leqslant 2n$.

Udowodnij, że dowolną liczbę naturalną można uzyskać jako różnicę dwóch wyrazów tego ciągu.

(3) Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w pewien kąt i są styczne do jednego z ramion w A_1, A_2, do drugiego w B_1, B_2. Prosta A_1B_2 przecina ponownie okręgi w punktach C_1, C_2. Udowodnij, że $|A_1C_1| = |B_2C_2|$.

Dzień drugi.

(4) Udowodnij, że wśród dowolnych dziesięciu liczb naturalnych jest taka, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych 9 liczb.

(5) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1x_2 = 1, \\ x_2x_3 = 2, \\ x_3x_4 = 3, \\ \dots \\ x_nx_1 = n. \end{cases}$$

Jeśli nie umesz zrobić tego zadania, to zrób chociaż dla $n = 7$.

(6) Na płaszczyźnie danych jest nieskończenie wiele rozłącznych kół o promieniach 1. Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna M, że jeśli każde z poprzednich kół zastąpimy kołem o tym samym środku i promieniu N, to dowolny punkt płaszczyzny należy do nie więcej niż M nowych kół.