Zadanie domowe 4: próbny II etap OM.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 18.11.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna/

Dzień pierwszy.

(1) Dane są liczby całkowite dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_6$ takie, że $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 2017$. Udowodnij, że $\frac{x_1 x_3 x_5}{x_2 x_4 x_6}$ nie może być skrócone do ułamka $\frac{n}{m}$ takiego, że $n + m < 2017$.

(2) Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów przy wierzchołkach A, B, C trójkąta przecinają okrąg na nim opisany w punktach V_1, V_2, V_3. Wykaż, że liczba

$$|AV_1| + |BV_2| + |CV_3|$$

jest większa niż obwód trójkąta.

(3) Znajdź wszystkie pary m, n liczb całkowitych spełniające równanie

$$n^2(m-1) + m^2(n-1) = 1.$$

Dzień drugi.

(4) Ile jest podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ w których równanie $x + y = 2n + 1$ nie ma rozwiązań?

(5) Wyznacz wszystkie wielomiany P spełaniające warunek: dla dowolnej liczby naturalnej $P(n)|2^n - 1$.

(6) Niech D będzie punktem symetrycznym do ortocentrum $\triangle ABC$ względem boku BC. Odległość D od AC wynosi h, a $\angle ACB$ ma miarę 45 stopni. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.