Zadanie domowe 8: próbny II etap OM.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 24.01.2020r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna/

Dzień pierwszy.

(1) Znajdź wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych takie, że $W(W(n)+n)$ jest liczbą pierwszą dla nieskończenie wielu n.

(2) Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$. Okrąg ω przechodzący przez punkt A przecina odcinki AB i AC w punktach P i Q odpowiednio w taki sposób, że $\angle BOP = \angle ABC$ i $\angle COQ = \angle ACB$. Udowodnij, że obraz odcinka BC przez symetrię względem prostej PQ jest styczny do ω.

(3) Niech n, m będą nieparzystymi liczbami naturalnymi. Każde pole planszy $n \times m$ jest pokolorowane na czerwono lub niebiesko. Mówimy, że wiersz jest *prawie czerwony*, gdy jest w nim więcej czerwonych pól niż niebieskich. Mówimy, że kolumna jest *prawie niebieska*, gdy jest w niej więcej pól niebieskich niż czerwonych. Wyznacz (w zależności od n, m) maksymalną wartość liczby liczba prawie czerwonych wierszy plus liczba prawie niebieskich kolumn.

Dzień drugi.

(4) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt P leży wewnątrz tego czworokąta i spełnia

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA.$$

Niech Q będzie punktem przecięcia prostych AD i BC, R punktem przecięcia prostych AB i CD. Udowodnij, że kąt, pod którym przecinają się proste PR i PQ ma taką samą miarę jak kąt pod którym przecinają się przekątne czworokąta.

(5) Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające

$$(n-1)^2 < f(f(n))f(n) < n^2 + n.$$

(6) Mamy sto kół o promieniu 1 na płaszczyźnie, ponadto wiemy, że żaden z trójkątów utworzonych przez środki tych kół nie ma pola większego niż 1000. Udowodnij, że istnieje prosta, która przecina co najmniej 3 spośród tych kół.