Lista 8: Twierdzenie Ptolemeusza.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 5.11.2019r.

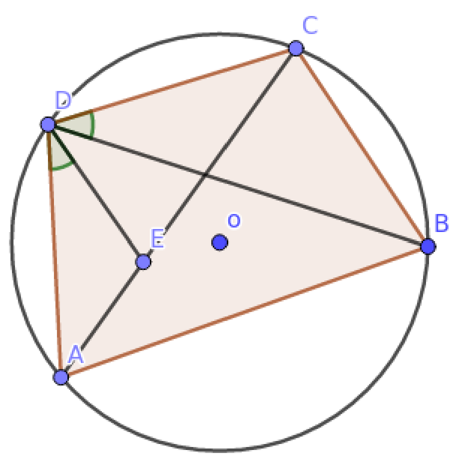
http://math.uni.wroc.pl/∼hejna/

Twierdzenie Ptolemeusza

Jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to

$$|AC||BD| = |AB||CD| + |AD||BC|.$$

(1) Udowodnij twierdzenie Ptolemeusza. *Wskazówka: dobierz punkt E na przekątnej tak, aby zaznaczone na rysunku kąty były równe. Do czego jest podobny $\triangle AED$? A do czego $\triangle CDE$? Wypisz odpowiednie zależności wynikające z podobieństwa i wywnioskuj twierdzenie.*



(2) Niech X- dowolny punkt na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym $\triangle ABC$. Udowodnij, że długość jednego z odcinków XA, XB, XC jest równa sumie pozostałych.

(3) Mówimy, że dwie liczby $a > b$ są w złotym stosunku, jeśli

$$\phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Liczba ϕ jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i wykorzystuje ją się często w różnych koncepcjach artystycznych. Udowodnij korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, że przekątna i bok pięciokąta foremnego są w złotym stosunku.

(4) Przy użyciu twierdzeniu Ptolemeusza udowodnij twierdzenie Pitagorasa. *Wskazówka: wpisz trójkąt prostokątny w okrąg i coś dorysuj.*

(5) Trójkąt $\triangle ABC$ wpisano w okrąg. Oznaczamy przez m, n, k odległości pewnego punktu X leżącego na okręgu od boków BC, AC, AB (załóżmy, że X leży na tym łuku BC, który nie zawiera A). Wykaż, że $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{k}$, gdzie a, b, c - długości boków BC, AC i AB.

(6) (pomocnicze) Niech M_1, M_2, M_3 oznaczają odpowiednio środki boków BC, AC, AB trójkąta, O - środek okręgu opisanego. Udowodnij, że na czworokącie AM_2OM_3 da się opisać okrąg.

(7) (pomocnicze) Niech a, b, c -długości boków trójkąta, r- promień okręgu wpisanego. Uzasadnij (przy oznaczeniach z poprzedniego zadania), że

$$r(a + b + c) = |OM_1|a + |OM_2|b + |OM_3|c.$$

(8) Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu wpisanego do boków trójkąta jest równa sumie promieni okręgu wpisanego i opisanego. *Wskazówka: użyj dwóch poprzednich zadań.*

(9) Dowolny okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta odcina na jego ramionach odcinki długości m i n, a na dwusiecznej długości l. Udowodnij, że stosunek $\frac{m+n}{l}$ nie zależy ani od promienia, ani od położenia wyjściowego okręgu.

(10) (OM Niemcy 2014) Niech $ABCDEFG$ będzie siedmiokątem foremnym. Uzasadnij, że

$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|}.$$

Wskazówka: rozważyć czworokąt $ABDG$.

(11) Na przeciwprostokątnej pewnego trójkąta prostokątnego zbudowano (na zewnątrz trójkąta) kwadrat, którego jednym bokiem jest owa przeciwprostokątna. Wyznacz odległość wierzchołka kąta prostego od środka symetrii kwadratu wiedząc, że przyprostokątne mają długości a, b.

(12) W sześciokącie wpisanym w okrąg pięć boków ma długość 81, bok AB ma długość 31. Znajdź sumę długości wszystkich przekątnych, które da się narysować z wierzchołka A.

(13) Sześciokąt o bokach długości (kolejno) $2, 7, 11, 11, 7, 2$ wpisano w okrąg. Znajdź promień tego okręgu.

(14) Załóżmy, że kwadrat $ABCD$ jest wpisany w okrąg i P leży na krótszym łuku CD. Udowodnij, że

$$|PA| + |PC| = \sqrt{2}|PB|.$$