
LISTA 6: BARDZO DUŻE LICZBY I WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 29.10.2019r.

<http://math.uni.wroc.pl/~hejna>

- (1) Która z liczb jest większa?
- (a) $123456 \cdot 123458$ czy $(123457)^2$?
 - (b) $1000!$ czy $(500!)^2$?
 - (c) $(\sqrt[4]{83} - 2)^{2019}$ czy $(\sqrt[4]{83} - 2)^{279}$?
 - (d) $(\sqrt[4]{83} - 3)^{2019}$ czy $(\sqrt[4]{83} - 3)^{279}$?
 - (e) 5^{444} czy 3^{700} ?
 - (f) $1/10$ czy $\sqrt{37} - 6$?

- (2) Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej

$$(5 - \sqrt{37})^{2019}, (6 - \sqrt{37})^{2021}, (7 - \sqrt{73})^{2023}, (9 - \sqrt{73})^{2025}.$$

- (3) Która liczba jest większa? $(\sqrt{37} - 6)^{600}$ czy 100^{-100} ?

- (4) Która liczba jest większa? $2^{1000!}$ czy $(999)^{999!}$?

- (5) Niech $a = \sqrt[16]{256}$. Która liczba jest większa? 256^a czy a^{256} ?

- (6) Jaka jest ostatnia cyfra liczby $2^{4^{8^{16^{32}}}}$? Potęgowanie wykonujemy od góry.

- (7) Udowodnij wzór skróconego mnożenia

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

- (8) Załóżmy, że w poprzednim zadaniu n jest nieparzyste. Wyprowadź wzór skróconego mnożenia na $a^n + b^n$.

- (9) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$|\sqrt{n + n^2} - n| < 1/2.$$

- (10) Czy liczba $2^{333} - 1$ jest pierwsza? A $2^{333} + 1$?

- (11) Liczby $a + b + c$ i $a^2 + b^2 + c^2$ są wymierne. Czy $ab + bc + ac$ musi być wymierne?

- (12) Udowodnij, że jeśli P jest dowolnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ liczba $P(a) - P(b)$ dzieli się przez $a - b$.

- (13) Wiadomo, że jeśli P jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, $2|P(5)$ i $5|P(2)$, to $P(7)$ dzieli się przez 10.

(14) Udowodnij, że

$$\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{5 - \sqrt{25}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 1.$$

(15) (OM, I etap) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych postaci $50^n + (50n + 1)^{50}$. *Wskazówka: $a^5 - b^5 = \dots$*

(16) (OM, II etap) Udowodnij, że dla dowolnej $n \in \mathbb{N}$ co najmniej jedna spośród liczb $n^n + 1$ i $(2n)^{2n} + 1$ jest liczbą złożoną. *Wskazówka: z zasady amerykańskich naukowców: n ma dzielnik nieparzysty albo nie ma.*