Lista 4: Nierówności średnich - optymalizacje.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 8.10.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna/

Nierówności średnich

Załóżmy, że mamy dane liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wtedy prawdziwa jest następująca nierówność między średnią arytmetyczną (*arithmetic mean*) a geometryczną (*geometric mean*), tj.

$$\text{(AM-GM)} \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Wprowadza się też inne rodzaje średnich, np. średnią harmoniczną, tj. zachodzi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Są też inne rodzaje średnich, np. średnie potęgowe, jednak nierówności dla tych średnich tak naprawdę wynikają z nierówności (AM-GM). Nierówności średnich są często stosowane w zadaniach optymalizacyjnych jako metoda alternatywna do twierdzeń analizy matematycznej wielu zmiennych, w przypadkach praktycznych dając rozwiązania średnio $(2n)$-razy krótsze, gdzie n jest liczbą zmiennych.

Optymalizacje przy użyciu nierówności (AM-GM) (zadania pożyczone od dr Jarosława Wróblewskiego)

(1) Znajdź największą wartość wyrażenia $\frac{ab}{16a^2+25b^2}$ dla $a, b > 0$. Podaj liczby, dla których wartość ta jest osiągana.

(2) Niech $a, b, c > 0$. Znajdź maksymalną wartość poniższych wyrażeń. Podaj dla jakich liczb to maksimum jest przyjmowane (prostsza wersja tego zadania pojawiła się na rosyjskim OM).

$$\frac{abc}{a^3 + b^3 + 125c^3}, \quad \frac{abc}{8a^3 + b^3 + 64c^3}, \quad \frac{abc}{a^2 + 8b^4 + 8b^4}, \quad \frac{abc}{54a^2 + b^4 + c^4}.$$

(3) Tak samo jak wyżej dla wyrażeń

$$\frac{abc}{2a^2 + 3b^3 + 64c^6}, \quad \frac{abc}{3a^2 + 16b^3 + c^6}.$$

(4) To samo, tyle że dla dwóch liczb $a, b > 0$:

$$\frac{ab^3}{4a^3 + b^3}, \quad \frac{ab^3}{27a^4 + b^4}, \quad \frac{a^2b^3}{a^5 + 48b^5}, \quad \frac{ab}{a^3 + b^3 + 64}.$$

(5) Dana jest funkcja (dwóch zmiennych) $f(x, y)$. Znajdź pary liczb rzeczywistych dodoatnich $x, y > 0$, dla których to maksimum jest osiągane. Zrób to dla

następujących funkcji

$$\frac{xy}{x^2+y^3+1},\quad \frac{xy}{x^2+y^5+1},\quad \frac{x^2y^2}{x^6+y^6+xy},\quad \frac{x^2y^2}{x^3+y^7+xy}.$$

(6) Niech $a,b,c>0$. Znajdź maksimum wyrażenia

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

(7) Niech $a,b,c,d>0$. Znajdź maksimum wyrażenia

$$\frac{abcd}{(a+d)(b+d)(c+d)(a+b+c)}.$$

(8) (Zadanie z analizy wielu zmiennych, zrób je szybciej!) Znajdź największą wartość funkcji $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ na sferze o promieniu 1.

(9) Dana jest elipsa $2x^2+3y^2=1$. Wpisz w nią prostokąt o największym polu.

(10) Znajdź największą wartość funkcji $f(x)=x(1-x^3)$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$. Użycie pochodnych jest tutaj niepotrzebne.

Inne zadania konkursowo-olimpijskie

(11) Dla dodatnich x,y,z udowodnij nierówność

$$xy^2+yz^2+zx^2\leqslant x^3+y^3+z^3.$$

Jest to specjalny przypadek tzw. nierówności o ciągach jednomonotonicznych.

(12) Znajdź wszystkie liczby n dla których istnieje rozwiązanie poniższego układu równań w liczbach dodatnich

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$
$$x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}=9.$$

(13) Dany jest ciąg liczb dodatnich $a_1,a_2,\ldots,$. Określamy nowy ciąg

$$b_n=n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Udowodnij, że dla dowolnego n zachodzi $b_n-b_{n-1}\leqslant a_n$.

(14) Niech $a,b,c>0$ i $a+b+c=1000$. Udowodnij, że

$$\frac{a^2}{30+a^7+b^{15}+c^8}+\frac{b^2}{30+b^7+c^{15}+a^8}+\frac{c^2}{30+c^7+a^{15}+b^8}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{1048}.$$

(15) Liczby dodatnie $x,y>0$ spełniają równość $x^3+y^3=x^5+y^5$. Uzasadnij, że $x^2+y^2\leqslant 1+xy$.

(16) Liczby dodatnie spełniają warunek $x^3+y^3\leqslant 2xy$. Udowodnij, że $x^9+y^9\leqslant 2$.

(17) Dla $x,y>1$ wykaż, że $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geqslant 8$.