Zadanie 1.
Zapiszmy AM-GM dla argumentów $\{a^8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. Mamy

$$\sqrt[8]{a^8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \leqslant \frac{a^8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{8}$$

Zwińmy wyrażenia z jedynkami. Mamy

$$\sqrt[8]{a^8} \leqslant \frac{a^8 + 7}{8}$$

Pomnóżmy obie strony przez 8. Mamy

$$8a \leqslant a^8 + 7. \blacksquare$$

Zadanie 2.
Zapiszmy AM-GM dla argumentów $\{a^4, b^4, 4, 4\}$. Mamy

$$\sqrt[4]{a^4 \cdot b^4 \cdot 4 \cdot 4} \leqslant \frac{a^4 + b^4 + 4 + 4}{4}$$

Zwińmy wyrażenia z czwórkami. Mamy

$$\sqrt[4]{16 \cdot a^4 \cdot b^4} \leqslant \frac{a^4 + b^4 + 8}{4}$$

Pomnóżmy obie strony przez 4. Mamy

$$8ab \leqslant a^4 + b^4 + 8. \blacksquare$$

Zadanie 3.

- zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^2, a^2, a^2, b^6, c^3, c^3\}$ mamy

  $$6\sqrt[6]{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot c^3 \cdot c^3} \leqslant 3a^2 + b^6 + 2c^3,$$

  zatem $\frac{abc}{3a^2+b^6+2c^3} \leqslant \frac{1}{6}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^2 = b^6 = c^3$, czyli $b = \sqrt[3]{a}$ i $c = \sqrt[3]{a^2}$.
- zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^4, 5b^4, 5b^4, 5b^4\}$ mamy

  $$4\sqrt[4]{a^4 \cdot (5b^4) \cdot (5b^4) \cdot (5b^4)} \leqslant a^4 + 15b^4,$$

  zatem $\frac{ab^3}{a^4+15b^4} \leqslant \frac{1}{4 \cdot 5^{3/4}}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^4 = 5b^4$, czyli $b = a \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$.
- zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{3a^6, b^6, 9c^6\}$ mamy

  $$3\sqrt[3]{3a^6 \cdot b^6 \cdot 9c^6} \leqslant 3a^6 + b^6 + 9c^6,$$

  zatem $\frac{abc}{3a^6+b^6+9c^6} \leqslant \frac{1}{9}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $3a^6 = b^6 = 9c^6$, czyli $b = a \cdot \sqrt[6]{3}$ i $c = a \cdot \sqrt[3]{3}$.
- zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^4, 3b^4, 9c^8, 9c^8\}$ mamy

  $$4\sqrt[4]{a^4 \cdot (3b^4) \cdot (9c^8) \cdot (9c^8)} \leqslant a^4 + 3b^4 + 18c^8,$$

  zatem $\frac{abc^2}{a^4+3b^4+18c^8} \leqslant \frac{1}{12\sqrt[4]{3}}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^4 = 3b^4 = 9c^8$, czyli $b = a \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ i $c = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.
- niech $a = 1$, wtedy wyrażenie będzie postaci

  $$\frac{b^3}{b^2 + 3}$$

  i może ono przyjąć dowolnie dużą wartość.

Zadanie 4.

Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{x^4, y^8, 1/2, 1/2\}$ mamy

$$4\sqrt[4]{x^4 \cdot y^8 \cdot (1/2) \cdot (1/2)} \leqslant x^4 + y^8 + 1,$$

zatem $\frac{xy^2}{x^4+y^8+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $x^4 = y^8 = 1/2$, czyli $(x, y) = \left(2^{-1/4}, 2^{-1/8}\right)$.

Zadanie 5.

Załóżmy, że jednym z rogów prostopadłościanu będzie punkt (x, y, z). Wtedy jego objętość będzie równa $|8xyz|$, zatem musimy zmaksymalizować to wyrażenie przy warunku $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + 6z^2 = 1$.
Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\left\{\frac{x^2}{3}, \frac{y^2}{2}, 6z^2\right\}$ mamy nierówność

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2}{3} \cdot \frac{y^2}{2} \cdot 6z^2} \leqslant \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + 6z^2 = 1.$$

Uporządkujmy tę nierówność.

$$|xyz|^{2/3} \leqslant \frac{1}{3}$$

Podnieśmy do potęgi 3/2 i pomnóżmy przez 8. Mamy

$$8|xyz| \leqslant 8 \cdot 3^{-3/2}$$

Równość w tej nierówności zajdzie wtedy, kiedy $\frac{x^2}{3} = \frac{y^2}{2} = 6z^2 = 1/3$, zatem rogami prostopadłościanu będą punkty $\left(\pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{18}}\right)$ i będzie miał on objętość $8 \cdot 3^{-3/2}$.

Zadanie 6.

Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$\left(5b^2 - 7ab + 2.46a^2\right) + \left(5c^2 - 7ac + 2.46a^2\right) = \left(b\sqrt{5} - a\frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(c\sqrt{5} - a\frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 \geqslant 0$$

Nierówność z treści zadania można przepisać do postaci

$$5b^2 - 7ab + 2.46a^2 + 5c^2 - 7ac + 2.46a^2 + 0.08a^2 \geqslant 0,$$

co jest oczywiste przez uprzednio udowodnioną nierówność i nieujemność $0.08a^2$.

Zadanie 7.

Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{(1/2)a^2, (1/2)a^2, (3/2)b^4, (3/2)b^4\}$ mamy nierówność

$$4\sqrt[4]{(1/2)a^2 \cdot (1/2)a^2 \cdot (3/2)b^4 \cdot (3/2)b^4} \leqslant a^2 + 3b^4$$

Przekształcając ją otrzymamy nierówność

$$2\sqrt{3} \cdot ab^2 \leqslant a^2 + b^4.$$

Zsumujmy cykliczne odpowiedniki powyższych nierówności. Mamy

$$2\sqrt{3}(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 3(a^4 + b^4 + c^4),$$

co jest mocniejszą wersją nierówności z treści, ponieważ $2\sqrt{3} \geqslant 3$.

Zadanie 8.

Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$\left(2a^2 - 2ab + (1/2)b^2\right) + \left((9/2)b^2 - 3bc + (1/2)c^2\right) + \left((1/2)c^2 - 6ca + 18a^2\right) = (a\sqrt{2} - b\sqrt{\frac{1}{2}})^2 + (b\sqrt{\frac{9}{2}} - c\sqrt{\frac{1}{2}})^2 + (\sqrt{\frac{1}{2}}c -$$

Ta nierówność jest równoważna nierówności z treści zadania.

Zadanie 9.
Przekształćmy równość z treści zadania. Mamy

$$a^2+b^2+a^{-2}+\frac{b}{a}-\sqrt{3}=\left(a^2-\sqrt{3}+\frac{3}{4a^2}\right)+\left(b^2+\frac{b}{a}+\frac{1}{4a^2}\right)=\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2=0$$

Suma kwadratów jest zerem wtedy i tylko wtedy, kiedy poszczególne kwadraty są zerami, zatem musi zajść układ równań:

$$\begin{cases} a-\frac{\sqrt{3}}{2a}=0 \\ b+\frac{1}{2a}=0 \end{cases}$$

Ten układ spełniają dwie pary liczb: $(a,b)=\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}},-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right)$ i $(a,b)=\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right)$.

Zadanie 10.
Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{(1/3)a^2,(1/3)a^2,(1/3)a^2,(1/2)b^3,(1/2)b^3,c^6\}$ mamy nierówność

$$6\sqrt[6]{(1/3)a^2\cdot(1/3)a^2\cdot(1/3)a^2\cdot(1/2)b^3\cdot(1/2)b^3\cdot c^6}\leqslant a^2+b^3+c^6$$

Przekształcając ją otrzymamy nierówność

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot abc\leqslant a^2+b^3+c^6.$$

Podzielmy tę nierówność przez $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}$. Otrzymamy

$$abc\leqslant\frac{a^2+b^3+c^6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}.$$

co jest mocniejszą wersją nierówności z treści, ponieważ $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\geqslant\sqrt{7}$.

Bartosz Chomiński