Zadanie domowe 2: Nierówności średnich - optymalizacje.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 8.10.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna/

**Takie zadania mogą się pojawić na kartkówce**

(1) Udowodnij, że dla dowolnej liczby dodatniej $a$ zachodzi nierówność

$$8a \leqslant a^8 + 7.$$

(2) Dla dodatnich $a, b > 0$ udowodnić nierówność

$$8ab \leqslant a^4 + b^4 + 8.$$

(3) Niech $a, b, c > 0$. Znajdź największą wartość wyrażeń i przykłady liczb, dla których jest przyjmowana równość

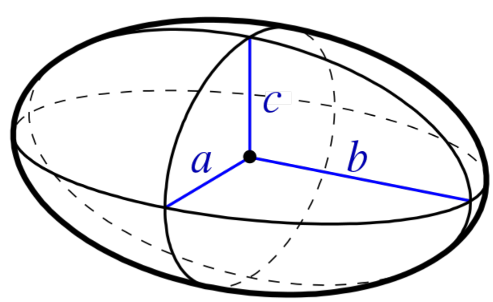
$$\frac{abc}{3a^2 + b^6 + 2c^3}, \quad \frac{ab^3}{15b^4 + a^4}, \quad \frac{a^2b^2c^2}{3a^6 + b^6 + 9c^6}, \quad \frac{abc^2}{a^4 + 3b^4 + 18c^8}, \quad \frac{a^2b^3}{2a^3 + 3b^2 + 1}.$$

(4) Znajdź największą wartość funkcji dwóch zmiennych $x, y > 0$. Podaj przykład wartości, dla których ta największa wartość jest przyjmowana

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^4 + y^8 + 1}.$$

(5) Elipsoida wygląda jak na rysunku (to ”trójwymiarowa elipsa”). Znajdź prostopadłościan o największej objętości (o krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych), który można wpisać w elipsoidę o równaniu

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + 6z^2 = 1.$$




**Zadania na szóstkę**

(6) Dla dodatnich $a, b, c > 0$ udowodnij nierówność

$$7a(b + c) \leqslant 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

(7) Dla dodatnich $a, b, c > 0$ udowodnij nierówność
$$3(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 3(a^4 + b^4 + c^4).$$

(8) Dla dodatnich $a, b, c > 0$ udowodnij nierówność
$$2ab + 3bc + 6ca \leqslant 20a^2 + 5b^2 + c^2.$$

(9) Wyznacz wszystkie pary liczb dodatnich $a, b$ spełniające równanie
$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

(10) Udowodnij, że dla dodatnich $a, b, c >$ zachodzi nierówność
$$abc < \frac{a^2 + b^3 + c^6}{\sqrt{7}}.$$