Zadanie 1.

Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{16a^2, 25b^2\}$ mamy

$$2\sqrt{(16a^2)\cdot(25b^2)} \leqslant 16a^2 + 25b^2,$$

zatem $\frac{ab}{16a^2+25b^2} \leqslant \frac{1}{40}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $16a^2 = 25b^2$, czyli $b = \frac{4}{5}a$.

Zadanie 2.

1. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^3, b^3, 125c^3\}$ mamy

   $$3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot(125c^3)} \leqslant a^3 + b^3 + 125c^3,$$

   zatem $\frac{abc}{a^3+b^3+125c^3} \leqslant \frac{1}{15}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^3 = b^3 = 125c^3$, czyli $b = a$ i $c = \frac{1}{5}a$.
2. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{8a^3, b^3, 64c^3\}$ mamy

   $$3\sqrt[3]{(8a^3)\cdot b^3\cdot(64c^3)} \leqslant 8a^3 + b^3 + 64c^3,$$

   zatem $\frac{abc}{8a^3+b^3+64c^3} \leqslant \frac{1}{24}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $8a^3 = b^3 = 64c^3$, czyli $b = 2a$ i $c = \frac{1}{2}a$.
3. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^2/2, a^2/2, 8b^4, 8c^4\}$ mamy

   $$4\sqrt[4]{(a^2/2)\cdot(a^2/2)\cdot(8b^4)\cdot(8c^4)} \leqslant a^4 + 8b^4 + 8c^4,$$

   zatem $\frac{abc}{a^2+8b^4+8c^4} \leqslant \frac{1}{8}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^2/2 = 8b^4 = 8c^4$, czyli $b = c = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a}$.
4. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{27a^2, 27a^2, b^4, c^4\}$ mamy

   $$4\sqrt[4]{(27a^2)\cdot(27a^2)\cdot b^4\cdot c^4} \leqslant 54a^2 + b^4 + c^4,$$

   zatem $\frac{abc}{54a^2+b^4+c^4} \leqslant \frac{1}{12\sqrt{3}}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $27a^2 = b^4 = c^4$, czyli $b = c = 3^{3/4}\cdot\sqrt{a}$.

Zadanie 3.

1. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\left\{\frac{2}{3}a^2, \frac{2}{3}a^2, \frac{2}{3}a^2, \frac{3}{2}b^3, \frac{3}{2}b^3, 64c^6\right\}$ mamy

   $$6\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}b^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}b^2\right)\cdot(64c^6)} \leqslant 2a^2 + 3b^3 + 64c^6,$$

   zatem $\frac{abc}{2a^2+3b^3+64c^6} \leqslant \frac{1}{12\sqrt[6]{\frac{2}{3}}}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $\frac{2}{3}a^2 = \frac{3}{2}b^3 = 64c^6$, czyli $b = \sqrt[3]{\frac{4}{9}a^2}$ i $c = \sqrt[6]{\frac{1}{96}a^2}$.
2. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^2, a^2, a^2, 8b^3, 8b^3, c^6\}$ mamy

   $$6\sqrt[6]{a^2\cdot a^2\cdot a^2\cdot(8b^2)\cdot(8b^2)\cdot(c^6)} \leqslant 3a^2 + 16b^3 + c^6,$$

   zatem $\frac{abc}{3a^2+16b^3+c^6} \leqslant \frac{1}{12}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^2 = 8b^3 = c^6$, czyli $b = 2\sqrt[3]{a^2}$ i $c = \sqrt[3]{a^2}$.

Zadanie 4.

1. podstawiając za zmienną b zmienną a, wyrażenie przyjmuje postać

   $$\frac{a^4}{5a^3} = \frac{a}{5}$$

   i może być dowolnie duże

2. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\left\{27a^4, \frac{1}{3}b^4, \frac{1}{3}b^4, \frac{1}{3}b^4\right\}$ mamy

$$4\sqrt[4]{(27a^2)\cdot\left(\frac{1}{3}b^4\right)\cdot\left(\frac{1}{3}b^4\right)\cdot\left(\frac{1}{3}b^4\right)} \leqslant 27a^4 + b^4,$$

zatem $\frac{ab^3}{27a^4+b^4} \leqslant \frac{1}{4}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $27a^4 = \frac{1}{3}b^4$, czyli $b = 3a$.

3. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^5/2, a^5/2, 16b^5, 16b^5, 16b^5\}$ mamy

$$5\sqrt[5]{(a^5/2)\cdot(a^5/2)\cdot(16b^5)\cdot(16b^5)\cdot(16b^5)} \leqslant a^5 + 48b^5,$$

zatem $\frac{a^2b^3}{a^5+48b^5} \leqslant \frac{1}{20}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $\frac{a^5}{2} = 16b^5$, czyli $b = a/2$.

4. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{a^3, b^3, 64\}$ mamy

$$3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot 64} \leqslant a^3 + b^3 + 64,$$

zatem $\frac{ab}{a^3+b^3+64} \leqslant \frac{1}{12}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $a^3 = b^3 = 64$, czyli $a = b = 4$.

Zadanie 5.

1. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{x^2/3, x^2/3, x^2/3, y^3/2, y^3/2, 1\}$ mamy

$$6\sqrt[6]{(x^2/3)\cdot(x^2/3)\cdot(x^2/3)\cdot(y^3/2)\cdot(y^3/2)\cdot 1} \leqslant x^2 + y^3 + 1,$$

zatem $\frac{xy}{x^2+y^3+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{6}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $\frac{x^2}{3} = \frac{y^3}{2} = 1$, czyli $(x, y) = \left(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}\right)$.

2. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{x^2/5, x^2/5, x^2/5, x^2/5, x^2/5, y^5/2, y^5/2, 1/3, 1/3, 1/3\}$ mamy

$$10\sqrt[10]{(x^2/5)\cdot(x^2/5)\cdot(x^2/5)\cdot(x^2/5)\cdot(x^2/5)\cdot(y^5/2)\cdot(y^5/2)\cdot 1/3\cdot 1/3\cdot 1/3} \leqslant x^2 + y^5 + 1,$$

zatem $\frac{xy}{x^2+y^5+1} \leqslant \frac{\sqrt{5}\sqrt[5]{2}\sqrt[10]{3^3}}{10}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $\frac{x^2}{5} = \frac{y^5}{2} = 1/3$, czyli $(x, y) = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)$.

3. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{x^6, y^6, xy/2, xy/2\}$ mamy

$$4\sqrt[4]{x^6\cdot y^6\cdot(xy/2)\cdot(xy/2)} \leqslant x^6 + y^6 + xy,$$

zatem $\frac{x^2y^2}{x^6+y^6+xy} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $x^6 = y^6 = xy/2$, czyli $(x, y) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$.

4. zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{x^3/7, x^3/7, \ldots, x^3/7, y^7/3, y^7/3, y^7/3, xy\}$ mamy

$$11\sqrt[11]{(x^3/7)\cdot(x^3/7)\cdot\ldots\cdot(x^3/7)\cdot(y^7/3)\cdot(y^7/3)\cdot(y^7/3)\cdot xy} \leqslant x^3 + y^7 + xy,$$

zatem $\frac{x^2y^2}{x^3+y^7+xy} \leqslant \frac{7^{7/11}\cdot 3^{3/11}}{11}$ i równość zachodzi wtedy, kiedy $x^3/7 = y^7/3 = xy$, czyli $(x, y) = \left(\sqrt[11]{3\cdot 7^6}, \sqrt[11]{3^2\cdot 7}\right)$.

Zadanie 6.

Zauważmy, że z trzech użyć AM-GM dla argumentów odpowiednio $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ mamy nierówności

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b, \quad 2\sqrt{bc} \leqslant b + c, \quad 2\sqrt{ca} \leqslant c + a,$$

które po pomnożeniu dadzą nierówność

$$8abc \leqslant (a + b)(b + c)(c + a),$$

zatem $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leqslant \frac{1}{8}$ i równość zachodzi dla $a = b = c$.

Zadanie 7.
Zauważmy, że z czterech użyć AM-GM dla argumentów odpowiednio $\{a/2, a/2, d\}$, $\{b/2, b/2, d\}$, $\{c/2, c/2, d\}$, $\{a, b, c\}$ mamy nierówności

$$3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}d} \leqslant a+d, \quad 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{4}d} \leqslant b+d, \quad 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{4}d} \leqslant c+d, \quad 3\sqrt[3]{abc} \leqslant a+b+c,$$

które po pomnożeniu dadzą nierówność

$$\frac{27}{4}abcd \leqslant (a+d)(b+d)(c+d)(a+b+c),$$

zatem $\frac{abcd}{(a+d)(b+d)(c+d)(a+b+c)} \leqslant \frac{4}{27}$ i równość zachodzi dla $a = b = c = 2d$.

Zadanie 8.
Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - (2xy + 2yz + 2zx) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0.$$

Z warunku leżenia na sferze o promieniu 1 punktu (x, y, z) i z definicji $f(x, y, z)$ mamy nierówność

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - (2xy + 2yz + 2zx) = 2 - 2f(x, y, z) \geqslant 0,$$

zatem zachodzi nierówność $f(x, y, z) \leqslant 1$ i równość zachodzi dla $x = y = z = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zadanie 9.
Wyznaczmy zależność y od x dla punktów leżących na tej elipsie. Z równości $2x^2+3y^2 = 1$ mamy $y = \pm\sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}$ i $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. W zależności y od x, x występuje tylko w kwadracie, zatem możemy ograniczyć jego przedział do $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Wiemy, że elipsa jest środkowo i osiowo symetryczna, zatem prostokąt, którego róg znajduje się w punkcie (p, q) leżącym na elipsie ma pole $4|pq|$.

Wstawiając za (p, q) parę $\left(x, \pm\sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}\right)$ otrzymujemy do zmaksymalizowania wyrażenie

$$4\left|x\sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}\right| = 4x\sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}$$

dla $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\left\{\frac{2}{3}x^2, \frac{1-2x^2}{3}\right\}$ otrzymujemy nierówność

$$4x\sqrt{\frac{1-2x^2}{3}} = \sqrt{6}\cdot 2\sqrt{\frac{2x^2}{3}\cdot\frac{1-2x^2}{3}} \leqslant \sqrt{6}\cdot\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a równość zachodzi dla $x = \frac{1}{2}$, zatem największy prostokąt wpisany w elipsę $2x^2 + 3y^2 = 1$ ma pole $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i jego rogi mają współrzędne $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Zadanie 10.
Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{3x^3, 1-x^3, 1-x^3, 1-x^3\}$ mamy nierówność

$$4\sqrt[4]{3}\cdot f(x)^{3/4} = 4\sqrt[4]{(3x^3)(1-x^3)^3} \leqslant 3,$$

równość zachodzi dla $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Dalej mamy

$$f(x)^{3/4} \leqslant 3^{3/4}\cdot\frac{1}{4},$$

zatem podnosząc obie strony równości do potęgi 4/3 mamy

$$f(x) \leqslant 3 \cdot \frac{1}{2^{8/3}},$$

więc maksimum funkcji $f(x)$ na przedziale $[0,1]$ to $3 \cdot 2^{-8/3}$ i taka wartość jest przyjmowana dla $x = 2^{-2/3}$.

Zadanie 11.

Zauważmy, że z trzech użyć AM-GM dla argumentów odpowiednio $\{x^3, y^3, y^3\}$, $\{y^3, z^3, z^3\}$, $\{z^3, x^3, x^3\}$ mamy nierówności

$$3\sqrt[3]{x^3y^6} \leqslant x^3 + 2y^3, \quad 3\sqrt[3]{y^3z^6} \leqslant y^3 + 2z^3, \quad 3\sqrt[3]{c^3a^6} \leqslant c^3 + 2a^3,$$

które po zsumowaniu dadzą nierówność

$$3(xy^2 + yz^2 + zx^2) \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3),$$

równoważną nierówności z tezy zadania.

Zadanie 12.

Zauważmy, że z HM-AM dla argumentów $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mamy nierówność

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Wstawiając 1 za $\sum_{i=1}^n x_i$ i 9 za $\sum_{i=1}^n x_i^{-1}$ otrzymujemy nierówność

$$\frac{n}{9} \leqslant \frac{1}{n},$$

zatem $n^2 \leqslant 9$ i $n \leqslant 3$. Rozważmy trzy przypadki:

1. n = 1
   Wtedy nie może istnieć taka liczba x_1, że $x_1 = 1$ i $x_1^{-1} = 9$.
2. n = 2
   Wtedy niech $x_2 = 1 - x_1 = 1 - x$. Mamy $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = 9$ jest równoważne z $9x^2 - 9x + 1 = 0$, zatem $x_1 = \frac{9-\sqrt{45}}{18}$ i $x_2 = \frac{9+\sqrt{45}}{18}$.
3. n = 3
   Wtedy możliwe pary to $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Jedynymi możliwymi wartościami n są 2 i 3.

Zadanie 13.

Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\left\{a_n, \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}, \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}, \ldots, \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}\right\}$ mamy nierówność

$$b_n = \sqrt[n]{a_n \cdot \left(\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}\right)^{n-1}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant a_n + (n-1)\left(\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}\right) = a_n + b_{n-1}.$$

Zadanie 14.

Zauważmy, że z trzech użyć AM-GM dla argumentów odpowiednio $\{a^7, 1, 1, \ldots, 1\}$, $\{b^{15}, 1, 1, \ldots, 1\}$ i $\{c^8, 1, 1, \ldots, 1\}$ mamy nierówności

$$a^7 + 6 \geqslant 7a, \quad b^{15} + 14 \geqslant 15b, \quad c^8 + 7 \geqslant 8c.$$

Możemy, korzystając z tych nierówności, ograniczyć ułamek $\frac{a^2}{30+a^7+b^{15}+c^8}$ od góry.

$$\frac{a^2}{30 + a^7 + b^{15} + c^8} = \frac{a^2}{3 + a^7 + 6 + b^{15} + 14 + c^8 + 7} \leqslant \frac{a^2}{3 + 7a + 15b + 8c} = \frac{a^2}{7003 + 7b + c} < \frac{a^2}{7003}$$

Sumując analogiczne nierówności dla pozostałych ułamków otrzymujemy tezę.

Zadanie 15.
Zauważmy, że $(x^3+y^3)(x^2+y^2) = x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$, zatem

$$x^2+y^2 = \frac{x^5+y^5+x^2y^2(x+y)}{x^3+y^3} = \frac{x^3+y^3+x^2y^2(x+y)}{x^3+y^3} = 1 + xy\frac{xy(x+y)}{x^3+y^3} = 1 + xy\frac{xy}{x^2-xy+y^2}$$

Wystarczy, że udowodnimy nierówność $xy \leqslant x^2 - xy + y^2$, która oczywiście jest równoważna nierówności $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

Zadanie 16.
Niech $u = xy$. Zauważmy, że

$$x^9+y^9 = (x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6) = (x^3+y^3)\left((x^3+y^3)^2 - 3x^3y^3\right) \leqslant 2u(4u^2-3u^3) = 2u^3(4-3u)$$

Wyrażenie x^9+y^9 jest dodatnie, zatem $u \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$. Wyznaczmy maksimum funkcji $f(u) = 2u^3(4-3u)$ na przedziale $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

Zauważmy, że z AM-GM dla argumentów $\{u, u, u, 4-3u\}$ mamy nierówność

$$2^{7/4}\sqrt[4]{f(u)} = 4\sqrt[4]{u^3(4-3u)} \leqslant 4,$$

która staje się równością dla $u = 1$. Podnosząc obie strony nierówności do potęgi 4 mamy

$$f(u) \leqslant 2.$$

A przecież $x^9+y^9 \leqslant f(xy) \leqslant 2$.

Zadanie 17.
Zauważmy, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność $\frac{x^2}{x-1} \geqslant 4$, ponieważ $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geqslant 0$.
Dalej z AM-GM dla argumentów $\left\{\frac{x}{\sqrt{y-1}}, \frac{y}{\sqrt{x-1}}\right\}$ mamy

$$8 \leqslant 2\frac{x}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y-1}} = 2\frac{x}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x-1}} \leqslant \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$$

Bartosz Chomiński