Lista 2: Zadania z pokryciami szachownicy.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 24.09.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna

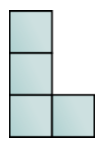
We wszystkich poniższych zadaniach przez pokrycie przy pomocy płytek rozumiemy pokrycie, w którym każde pole (szachownicy) jest przykryte oraz płytki nie nachodzą na siebie i nie wystają poza szachownicę.

(1) Czy szachownicę 10×10 da się pokryć płytkami o wymiarach 4×1?

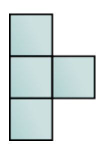
(2) Czy szachownicę 8×8 z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożnikami da się pokryć płytkami 2×2?

(3) Czy szachownicę 8×8 z usuniętym narożnikiem da się pokryć płytkami 3×1?

(4) Czy szachownicę 10×10 da się pokryć płytkami jak na rysunku?

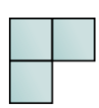


(5) Czy szachownicę 50×50 da się pokryć płytkami jak na rysunku?



(6) Wiadomo, że szachownicę 7×7 da się pokryć jednym klockiem 1×1 i 16 kostkami wymiaru 3×1. Na jakich polach może leżeć płytka 1×1?

(7) Szachownicę 10×10 pokryto 33 płytkami jak na rysunku i jedną płytką 1×1. Na których polach może leżeć płytka 1×1?



(8) Dana jest szachownica o wymiarach 111×111. Udowodnij, że w dowolnym pokryciu tej szachownicy płytkami 2×2 i 3×3 musi być użyte nie mniej niż 33 płytek o wymiarach 3×3.

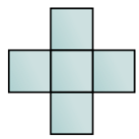
(9) Czy w poprzednim zadaniu liczbę "33" można zastąpić liczbą "34"?

(10) Dana jest szachownica 4×4. Czy konik szachowy może przejść przez całą szachownicę odwiedzając każde z pól tylko raz?

(11) Ile maksymalnie króli można umieścić na szachownicy tak, aby żadne dwa się nie biły?

(12) Czy kwadrat 19×19 da się podzielić na kwadraty 2×2, 3×3 i 5×5? Ile co najmniej płytek 3×3 należy użyć?

(13) Udowodnij, że szachownicy 14×14 z usuniętym jednym polem narożnym nie da się pokryć płytkami 1×5 i krzyżykami jak na rysunku.



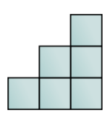
(14) (LXX OM, 1 etap) Szachownicę o wymiarach 2018×2018 pokryto jedną płytką 2×2 i płytkami 5×1. Wykaż, że płytka 2×2 nie leży przy brzegu szachownicy.

Zadania trudniejsze

(1) Udowodnij następujące (ogólne) twierdzenie de Bruijn'a: szachownicę o wymiarach $a \times b$ da się pokryć płytkami $1 \times m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m|a$ i $m|b$. Jak mogłoby wyglądać trójwymiarowe uogólnienie tego twierdzenia? A na dowolną liczbę wymiarów?

(2) Szachownica 6×6 jest pokryta płytkami 2×1 (klockami domina). Pokaż, że istnieje linia, która dzieli szachownicę na dwie części i nie przecina żadnej płytki 2×1 (może dotykać brzegu).

(3) "Klocek-schody" jest zrobiony z 12 sześcianów - ma grubości 2 i przekrój boczny jak na rysunku. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{N}$ dla których z takich klocków da się zbudować sześcian $n \times n$.



(4) Wyznacz wszystkie szachownice $n \times m$ które da się pokryć klocami jak na rysunku. *Uwaga: to zadanie jest trudne. Jeśli nie umiesz jego zrobić dla wszystkich n, m wyznacz jak najwięcej przykładów n, m dla których da się pokryć lub dla których da się pokryć.*