ZADANIE DOMOWE 1: SUMY TELESKOPOWE.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 17.09.2019r.

`http://math.uni.wroc.pl/~hejna`

Uwaga: Jest to lista dodatkowa, dlatego rozwiązania tych zadań nie będą dokładnie omawiane na lekcji. Jednak za rozwiązania tych zadań można zdobywać dodatkowe punkty. Jeśli oddasz rozwiązanie zadania na kartce przed lekcją 17.09, dostaniesz **1 pkt**. Jeśli zaprezentujesz zadanie przy tablicy na lekcji, otrzymasz za nie **3 pkt**.

(1) Udowodnij, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ mamy $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} < 4$.

(2) Oblicz $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \ldots + \frac{1}{9700}$.

(3) Oblicz i uogólnij $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

(4) Oblicz $\sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{n^2+3n+2}$.

(5) Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego. Udowodnij, że dla dowolnego n mamy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} < 1$.

(6) Oblicz
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2018^2}\right).$$

(7) Znajdź zwarty wzór na $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

(8) Znajdź zwarty wzór na $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

(9) Znajdź zwarty wzór na $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

(10) Znajdź zwarty wzór na $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. *Uwaga: to zadanie ma dwa istotnie różne rozwiązania. Jedno (naturalne) używa liczb zespolonych, drugie jest sprytne i wykorzystuje sumy teleskopowe.*

(11) Oblicz
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

(12) Oblicz sumę $\sum_{n=0}^{180} n\cos(n^\circ)$. *Wskazówka: pomnóż przez* $\sin(1^\circ)$.

(13) Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy d. Znajdź wzór na $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}$.