**Zadanie 1.**
Wykorzystujemy nierówność $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)}$ i równość $\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$ dla $k > 1$ i otrzymujemy sumę teleskopową. Składnik $\frac{1}{1}$ zostawiamy.

**Zadanie 2.**
Wykorzystujemy równość $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$ i mamy sumę teleskopową.

**Zadanie 3.**
Wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia $\frac{1}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a-b}$ i mamy sumę teleskopową.

**Zadanie 4.**
Wykorzystujemy równość $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ i mamy sumę teleskopową.

**Zadanie 5.**
Wykorzystujemy definiującą liczby Fibonacciego równość $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ i mamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k-1} \cdot (F_{k-1} + F_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{F_k}}{F_{k-1}} - \frac{\frac{1}{F_k}}{F_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}}$$

Mamy sumę teleskopową:

$$\frac{1}{F_0F_1} - \frac{1}{F_1F_2} + \frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \ldots + \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}},$$

z której zostanie po skróceniu

$$\frac{1}{F_0F_1} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} = 1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}} < 1$$

**Zadanie 6.**
Wykorzystujemy równość $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}$ i mamy iloczyn teleskopowy.

**Zadanie 7.**
Wykorzystujemy równość $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2}$ i mamy sumę teleskopową.

**Zadanie 8.**
Wykorzystujemy równość $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ i mamy sumę teleskopową.

**Zadanie 9.**
Wykorzystujemy równość $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{k+2}{(k+2)!}$ i mamy sumę teleskopową.

**Zadanie 10.**
Niech rozpatrywana suma będzie równa $s$. Pomnóżmy rozpatrywaną sumę przez $2-2\cos x$. Otrzymamy wtedy ciąg przekształceń:

$$s(2 - 2\cos x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \cdot (2 - 2\cos x) = \left(2\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right) - \sum_{k=0}^{n} 2\cos x \cos(kx)$$

Ze wzoru na iloczyn cosinusów $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ mamy dalej:

$$\left(2\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right) - \sum_{k=0}^{n} 2\cos x \cos(kx) = 2s - \sum_{k=0}^{n} (\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) =$$

$$= 2s - ((\cos x + \cos(-x)) + (\cos 2x + \cos 0) + \cdots + (\cos nx + \cos(n-2)x) + (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x))$$

Zauważmy, że składniki $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos(n-1)x$ występują w tej sumie dokładnie po dwa razy, a $\cos 0$ i $\cos nx$ dokładnie jeden raz, zatem możemy odjąć sztucznie $\cos 0$ i $\cos nx$ i zostanie nam $2s$:

$$2s - (\cos(-x) - \cos 0 - \cos nx + \cos(n+1)x + 2s) = -\cos(-x) + \cos 0 + \cos nx - \cos(n+1)x$$

Zatem otrzymujemy równość

$$s(2-2\cos x) = -\cos(-x) + \cos 0 + \cos nx - \cos(n+1)x,$$

więc po przekształceniach mamy

$$s = \frac{-\cos(-x) + \cos 0 + \cos nx - \cos(n+1)x}{2-2\cos x}$$

**Zadanie 11.**

Wykorzystujemy równość $\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) = \frac{2^{2^k}+1}{2^{2^k}}$ i wzór skróconego mnożenia na sumę kwadratów. Pomnóżmy ten iloczyn przez $\frac{2-1}{1}=1$

$$\frac{2-1}{1}\cdot\frac{2^{2^0}+1}{2^{2^0}}\cdot\frac{2^{2^1}+1}{2^{2^1}}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$$

Dalej wielokrotnie wykorzystując równość $\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k-1}}\cdot\frac{2^{2^k}+1}{2^{2^k}} = \frac{2^{2^{k+1}}-1}{2^{2^{k+1}-1}}$mamy:

$$\frac{2-1}{1}\cdot\frac{2^{2^0}+1}{2^{2^0}}\cdot\frac{2^{2^1}+1}{2^{2^1}}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}} = \frac{2^{2^1}-1}{2^{2^1-1}}\cdot\frac{2^{2^1}+1}{2^{2^1}}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}} = \frac{2^{2^2}-1}{2^{2^2-1}}\cdot\frac{2^{2^2}+1}{2^{2^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}} =$$

$$= \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}}}$$

**Zadanie 12.**

Przed pomnożeniem sumy przez $\sin(1^\circ)$ poprzekształcajmy ją. Wiemy, że $\cos x = -\cos(180^\circ - x)$, zatem

$$\sum_{k=0}^{180} k\cos(k^\circ) = \sum_{k=0}^{89} k\cos(k^\circ) + 90\cdot\cos(90^\circ) + \sum_{k=91}^{180} k\cos(k^\circ) = \sum_{k=0}^{89} k\cos(k^\circ) + 0 + \sum_{k=0}^{89}(180-k)\cos(180^\circ-k^\circ) =$$

$$= \sum_{k=0}^{89} k\cos(k^\circ) + \sum_{k=0}^{89}(180-k)\cos(180^\circ-k^\circ) = \sum_{k=0}^{89} k\cos(k^\circ) - \sum_{k=0}^{89}(180-k)\cos(k^\circ) = \sum_{k=0}^{89}(2k-180)\cos(k^\circ)$$

Wykorzystajmy własność $\cos x = \sin(90^\circ - x)$:

$$\sum_{k=0}^{89}(2k-180)\cos(k^\circ) = \sum_{k=0}^{89}(2k-180)\sin(90^\circ-k^\circ) = -2\sum_{k=0}^{89}(90-k)\sin(90^\circ-k^\circ)$$

Przeindeksujmy $90-k$ na $l$, będziemy mieli

$$-2\sum_{l=1}^{90} l\sin(l^\circ)$$

Pomnóżmy przez $\sin(1^\circ)$ i wykorzystajmy wzór $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$:

$$-2\sum_{l=1}^{90} l\sin(l^\circ)\sin(1^\circ) = -\sum_{l=1}^{90}(l\cos((l-1)^\circ) - l\cos((l+1)^\circ)) = \sum_{l=1}^{90}(l\cos((l+1)^\circ) - l\cos((l-1)^\circ))$$

Mamy sumę teleskopową:

$$\sum_{l=1}^{90}(l\cos((l+1)^\circ) - l\cos((l-1)^\circ)) = 1\cos 2^\circ - 1\cos 0^\circ + 2\cos 3^\circ - 2\cos 1^\circ + 3\cos 4^\circ - 3\cos 2^\circ + \ldots + 90\cos 91^\circ - 90\cos 89^\circ$$

Wyznaczmy czynniki stojące przy liczbach $\cos 2^\circ, \cos 3^\circ, \ldots, \cos 89^\circ$. Każda z tych liczb występuje z pewnym czynnikiem w tej sumie dokładnie dwa razy. Raz jako $l\cos((l+1)^\circ)$, a raz jako $-l\cos((l-1)^\circ)$, zatem czynnik stojący przy każdej z tych liczb to $(l-1)-(l+1) = -2$. Możemy więc zapisać:

$$\sum_{l=1}^{90}(l\cos((l+1)^\circ) - l\cos((l-1)^\circ)) = -\cos 0^\circ - 2\cos 1^\circ + \left(\sum_{l=2}^{89} -2\cos(l^\circ)\right) + 89\cos 90^\circ + 90\cos 91^\circ =$$

Wrzućmy $-2\cos 1^\circ$ pod sumę i zróbmy to samo z $-2\cos 0^\circ$, sztucznie dodając $\cos 0^\circ$.

$$= \left(\sum_{l=0}^{89} -2\cos(l^\circ)\right) + \cos 0^\circ + 90\cos 91^\circ = \left(\sum_{l=0}^{89} -2\cos(l^\circ)\right) + 1 + 90\cos 91^\circ$$

Z zadania 10. wiemy, że $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{-\cos(-x)+\cos 0+\cos nx-\cos(n+1)x}{2-2\cos x}$, zatem

$$-2\left(\sum_{l=0}^{89} \cos(l^\circ)\right) + 1 + 90\cos 91^\circ = \frac{-\cos(-1^\circ)+\cos 0+\cos 89^\circ-\cos 90^\circ}{\cos 1^\circ - 1} + 1 + 90\cos 91^\circ$$

Pomnożyliśmy sumę przez $\sin 1^\circ$, zatem powyższy wynik musimy podzielić

$$\sum_{k=0}^{180} k\cos(k^\circ) = \frac{-\cos(-1^\circ)+\cos 0+\cos 89^\circ-\cos 90^\circ}{(\cos 1^\circ - 1)(\sin 1^\circ)} + \frac{1}{\sin 1^\circ} - 90 = \frac{\cos 89^\circ}{(\cos 1^\circ - 1)(\sin 1^\circ)} - 90$$

**Zadanie 13.**

Niech różnicą tego ciągu arytmetycznego będzie $d$. Wykorzystujemy równość $\frac{1}{a_{k-1}a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2d}}{a_{k-1}} - \frac{\frac{1}{2d}}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{2da_{k-1}a_k} - \frac{1}{2da_k a_{k+1}}$ i mamy sumę teleskopową.

Bartosz Chomiński