# LISTA 12: FUNKCJE TWORZĄCE.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 3.12.2019r.

`http://math.uni.wroc.pl/~hejna`

**Szereg potęgowy**

Nieskończoną sumę postaci $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ nazywamy (formalnym) **szeregiem potęgowym**. Często używamy zwięźlejszego zapisu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wielomiany są szczególnymi przypadkami takich szeregów. Szeregi potęgowe można dodawać i mnożyć (można też dzielić, ale to odrobinę trudniejsze). Jeśli mamy dany ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to funkcję zadaną szeregiem nazywamy **funkcją tworzącą** ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Wyznacz iloczyn

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots).$$

*Wskazówka: wymnażając wyraz po wyrazie tak jak zwykłe skończone nawiasy sprawdź, jaki współczynnik stoi przy $x^n$.*

(2) Udowodnij, że $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$. Z tego wynika, że funkcją tworzącą ciągu samych jedynek jest $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

(3) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $a_{2n} = 1$, $a_{2n+1} = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(5) Ciąg $a_n$ definiujemy rekurencyjnie jako $a_0 = 3$, $a_1 = 8$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Wyznacz pierwszych 5 wyrazów tego ciągu.
   (b) Niech $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie funkcją tworzącą tego ciągu. Uzasadnij, że
   $$F(x) = 5xF(x) - 6x^2F(x) - 7x + 3.$$
   (c) Wylicz z poprzedniego równania $F(x)$.
   (d) Znajdź takie liczby $A, B$, żeby $F(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{B}{1-2x}$.
   (e) Używając poprzedniego zadania podaj nierekurencyjny wzór na $a_n$.

(6) Powtórz poprzednie zadanie dla ciągu $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_{n+2} = b_{n+1} + 12b_n$.

(7) Znajdź funkcję tworzącą ciągu Fibonacciego.

(8) Wyznacz funkcję tworzącą dla ciągu $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Wskazówka: z poprzednich zadań wiadomo, że $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, oblicz pochodną stronami.*

(9) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $\left(\binom{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Użyj tego wyniku aby wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

(10) Użyj poprzedniego wyniku, aby obliczyć sumę $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (przypominam, że kiedyś tego nie umieliśmy zrobić).

(11) Podaj ciąg, dla którego $\frac{1}{(1-2x)^2}$ jest funkcją tworzącą.

(12) Znajdź jawny wzór na ciąg zadany rekurencyjnie $c_0 = 3$, $c_1 = -3$, $c_{n+1} = 2c_{n+1} - c_n$. *Wskazówka: rób jak wcześniej, ale musisz w pewnym momencie skorzystać z poprzedniego zadania.*

(13) Niech $a_n$ oznacza liczbę sposobów, na jakie można wypłacić kwotę $n$ złotych monetami 1, 2, 3 złotowymi. Wyznacz jawny wzór na $a_n$. *Wskazówka:*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1-x^3)}.$$

(14) Znajdź funkcję tworzącą ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 1$, $a_0 = 0$. *Wskazówka: znajdź taką funkcję, że jej pochodna wynosi $\frac{1}{1-x}$ (tak naprawdę taka procedura to rodzaj całkowania symbolicznego).*

(15) Znajdź funkcję tworzącą ciągu $a_0 = 0$, $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\frac{1}{n-i}$.

(16) Załóżmy, że mamy daną funkcję tworzącą $f$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Przez $f^{(n)}(x)$ oznaczamy wzięcie $n$-razy pochodnej funkcji, np. $f^{(2)}$ to pochodna pochodnej. Uzasadnij (różniczkując szereg funkcji tworzącej wyraz po wyrazie), że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

(17) Na ile sposobów można zapisać 10 jako sumę dwóch liczb ze zbiorów $\{2, 3, 6, 7\}$ i $\{3, 4, 5, 8\}$, z każdego zbuoru po jednej liczbie? Jak to zrobić "bezmyślnie", np. wspomagając się Wolframem Alpha? *Wskazówka: rozważ wielomiany $x^2 + x^3 + x^6 + x^7$ i $x^3 + x^4 + x^5 + x^8$. Co się stanie jesli je wymnożysz?*

(18) **Liczby Catalana** $C_k$ definiujemy jako liczba połączeń w pary wierzchołków $2k$-kąta foremnego tak, aby odpowiadające przekątne (lub boki) się nie przecinały. Uzasadnij kombinatorycznie, że

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

(19) Udowodnij, że funkcją tworzącą $C(x)$ ciągu liczb Catalana jest $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. *Wskazówka: Podnieś do kwadratu funkcję tworzącą, zobacz, co się stanie. Skorzystaj z poprzedniego zadania.*

(20) Znajdź regułę na obliczanie kolejnych pochodnych funkcji $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Użyj tej reguły aby wyprowadzić jawny wzór na liczby $C_n$.