Lista 15: Wielomiany w teorii liczb.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 17.12.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna

(1) (OM, Rosja) Znajdź sumę współczynników wielomianu P po wymnożeniu $P(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x + 3x^2)^{744}$.

(2) (OM, Kanada) Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeśli $P(0)$ i $P(1)$ są nieparzyste, to $P(n) \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

(3) (OM, Polska) Dany jest wielomian P w współczynnikach całkowitych. Wiadomo, że $5|P(2)$ i $2|P(5)$. Udowodnij, że $10|P(7)$.

(4) (do zapamiętania) Udowodnij, że jeśli wielomian P ma współczynniki całkowite oraz $a, b \in \mathbb{Z}$, to $P(a) - P(b)$ jest podzielne przez $a - b$.

(5) Wielomian P o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości ± 1 dla trzech różnych liczb całkowitych. Udowodnij, że nie istnieje takie $n \in \mathbb{Z}$, że $P(n) = 0$.

(6) Niech P będzie wielomianem takim, że $\underbrace{P(P(\cdots P}_{n \text{ razy}}(x)\cdots)) = x$ o współczynnikach całkowitych. Uzasadnij, że $P(P(x)) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(7) (OM, USA) Niech a, b, c będą różnymi liczbami całkowitymi, P niech będzie wielomianem o współczynikach całkowitych. Udowodnij, że równości $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(a) = c$ nie mogą zachodzić wszystkie jednocześnie.

(8) (OM, Polska) Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych mające następującą własność: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $P(n)$.

(9) (OM, Polska) Wielomian P ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeśli wielomiany $P(x)$ i $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają też wspólny pierwiastek całkowity.

(10) (OM, Rosja) Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeśli $P(n)$ dzieli się przez 7 dla 4 różnych liczb całkowitych, to $P(n)$ nie dzieli się przez 14 dla żadnej liczby całkowitej n.

(11) Udowodnij, że nie istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych taki, że $P(n)$ jest pierwsze dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(12) (OM, Wielka Brytania) Udowodnij, że jeśli P jest wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia d, to $Q(x) = P(x)P(x) - 1$ ma co najwyżej $d + 2$ pierwiastków całkowitych.

(13) (OM, USA) Znajdź wszystkie wielomiany P o współczynnikach ze zbioru $\{1, -1\}$ stopnia d mające d rzeczywistych pierwiastków.

(14) Definiujemy uogólniony współczynnik dwumianowy

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}.$$

Sprawdź, że to rzeczywiście jest uogólnienie, tj. sprawdź, że dla $x \in \mathbb{N}$ definicja pokrywa się ze standardową definicją współczynnika dwumianowego.

(15) Udowodnij, że jeśli P jest takim wielomianem stopnia n, że $P(m) \in \mathbb{Z}$ dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$, to istnieją takie całkowite $c_0, c_1, \ldots, c_n$ takie, że

$$P(x) = c_n\binom{x}{n} + c_{n-1}\binom{x}{n-1} + \cdots + c_1\binom{x}{1} + c_0\binom{x}{0}.$$

(16) Niech $m \in \mathbb{N}$ i niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie takim wielomianem, że $P(k)$ jest podzielne przez m dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $a_n n!$ jest podzielne przez m.

(17) Niech P będzie wielomian stopnia n o współczynnikach całkowitych. Wykaż, że istnieje co najwyżej $n+2$ różnych liczb całkowitych k dla których zachodzi równość $P(k)^2 = 1$.