Lista 14: Uogólnione wzory Viete'a. Zadania olimpijskie z wielomianów - pełny przegląd.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 17.12.2018r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna

(1) Dany jest wielomian $P(x)$ trzeciego stopnia, z zasadniczego twierdzenia algebry wiemy, że $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ dla pewnych x_1, x_2, x_3. Wymnóż nawiasy tak, żeby przedstawić wielomian w postaci $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Zapisz wzory na b, c, d. Są to tzw. **wzory Viete'a** dla wielomianu stopnia 3.

(2) Zrób zadanie (1) dla wielomianu stopnia 4.

(3) Udowodnij, że suma zespolonych pierwiastków z 1 stopnia $n \geqslant 2$ wynosi 0 *Uwaga: możesz robić to zadania nawet jeśli nie wiesz co to jest liczba zespolona - wzory Viete'a działają. Musisz tylko uwierzyć w zasadnicze twierdzenie algebry.*

(4) Udowodnij, że jeśli wielomian P jest funkcją okresową, to jest on stały.

(5) Znaleźć taki wielomian P trzeciego stopnia, że $P(-2) = -4$, $P(-1) = 2$, $P(0) = -1$, $P(1) = 10$.

(6) Znaleźć taki wielomian stopnia 4 o współczynnikach całkowitych, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest jego pierwiastkiem.

(7) Znaleźć wielomian o współczynnikach całkowitych możliwie niskiego stopnia taki, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ jest jego pierwiastkiem.

(8) Niech $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + x^{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_1x + a_0$. Wiadomo, że $P(i) = i$ dla $i = -n, -n+1, \ldots, -2-1, 0, 1, \ldots, n-1, n$. Wyznacz

$$a_{2n} + a_{2n-2} + a_{2n-4} + \ldots + a_2 + a_0.$$

(9) Niech P będzie wielomianem z poprzedniego zadania. Wyznacz sumę współczynników wielomianu $P(x^3) + P(x^2) + P(x) + 1$.

(10) Czy istnieje wielomian P stopnia 9 taki, że $P(i) = \operatorname{sgn}(i)$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$?

(11) Zrób zadanie (1) dla wielomianu stopnia n. Są to tzw. **uogólnione wzory Viete'a**. Są one dosyć skomplikowane (oprócz wzorów na a_0 i a_{n-1}, więc (chyba) lepiej jest zapamiętać sposób ich wyprowadzenia niż ich ogólną postać (i wyprowadzić na olimpiadzie w razie potrzeby).

(12) Rozważmy wielomian $x^3 + ax^2 + b$. Wiadomo, że suma kwadratów jego trzech zespolonych pierwiastków wynosi 5. Wyznacz a.

(13) Wykaż, że jeśli równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ma potrójny pierwiastek, to $bc - 9ad = 0$.

(14) Wielomian W daje z dzielenia przez $x - 1$ resztę 1, a z dzielenia przez $x - 2$ resztę 2. Znaleźć resztę z dzielenia W przez $(x - 1)(x - 2)$.

(15) Wielomian W daje z dzielenia przez $x - 2$ resztę 5, a z dzielenia przez $x - 3$ resztę 7. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu W przez $(x - 2)(x - 3)$.

(16) Znaleźć wszystkie takie wielomiany P, że

$$P(x) = \frac{1}{2}(P(x - 1) + P(x + 1)).$$

(17) Znaleźć wszystkie wielomiany spełniające warunek

$$xG(x - 1) = (x - 2)G(x).$$

(18) Udowodnij, że jeśli $P(x) \neq x$, to $P(P(P(x))) - x$ dzieli się przez $P(x) - x$.

(19) Znajdź wszystkie funkcje $f(x)$ takie, że

$$f(x) = f(x - 1) = f(2x).$$

(20) Liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4 są miejscami zerowymi wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli x_3x_4 jest niewymiarna a x_3+x_4 wymierna, to $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

(21) Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$ wielomian $P(x) = (x + 1)^{2n+1} - x^{n+2}$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + x + 1$.

(22) Niech P będzie wielomianem stopnia n o tej własności, że $P(j) = \frac{1}{j+1}$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$. Znajdź $P(n + 1)$.

(23) Dany jest wielomian $P(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2$. Niech $Q(x) = P(x)P(x^3)P(x^9)P(x^{27})P(x^{81})$. Oblicz sumę modułów współczynników wielomianu Q.

(24) Dane są liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Wyznacz (tzn. napisz wzorem zależnym od $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$) wielomian P stopnia n taki, że $P(x_i) = y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Taki wielomian nazywa się **wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a**.