Wielomiany: lista twierdzeń olimpijskich.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 17.12.2018r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna

Zasadnicze twierdzenie algebry

Niech $P(z) = a_n z^n + z_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, gdzie liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami zespolonymi. Wtedy P można zapisać w postaci

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1})(z - z_n)$$

dla pewnych (niekoniecznie różnych) liczby zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$.

O dzieleniu wielomianów z resztą

Jeśli P i Q są wielomianami takimi, że $\deg P < \deg Q$, to istnieje dokładnie jeden wielomian R stopnia $\deg R < \deg Q$ i dokładnie jeden S, że $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$. Gdy $R \equiv 0$, to mówimy, że P **jest podzielny** przez Q.

Twierdzenie Bezout

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu P wtedy i tylko wtedy, gdy P jest podzielny przez $x - a$.

Wniosek z zasadniczego twierdzenia algebry

Wielomian stopnia d ma co najwyżej d różnych pierwiastków zespolonych.

Uogólnione wzory Viete'a

Zapisując wielomian w postaci $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1})(z - z_n)$ i wymnażając nawiasy możemy wyrazić odpowiednie współczynniki wielomianu w zależności od tych pierwiastków, np.

$$a_{n-1} = -\frac{1}{a_n}\left(z_1 + z_2 + \ldots + z_n\right),$$

$$a_0 = (-1)^n x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n.$$

Własność podzielności

Dla wielomianu W o współczynnikach całkowitych i dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ mamy $a - b | W(a) - W(b)$.

Twierdzenie Lagrange'a

Dowolny wielomian stopnia n jest wyznaczony przez swoje wartości w $n+1$ różnych punktach, tj. jeśli znamy wartości wielomianu w $n+1$ punktach, to już wiemy jaki jest wielomian. Odwrotnie, wybierając pewne różne

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$$

zawsze znajdziemy taki wielomian P stopnia co najwyżej n, że $P(x_i) = y_i$.

Kryterium Eisensteina

Niech $P(z) = a_n z^n + z_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeśli istnieje liczba pierwsza p taka, że $p | a_i$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ oraz p^2 nie dzieli a_0 i a_n, to P nie ma całkowitych pierwiastków.