Lista 10: Zastosowania pochodnych.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 18.11.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/∼hejna/

Warunek konieczny istnienia ekstremum

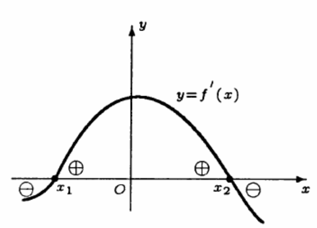
Aby funkcja f miała w punkcie x_0 ekstremum (tj. minimum lub maksimum) musi być $f'(x_0) = 0$.

(1) Znajdź maksymalną wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 12x + 5$ przy pomocy pochodnych. Czy daje to taki sam wynik jak znalezienie wierzchołka paraboli?

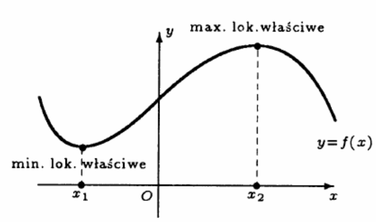
(2) Wyznacz punkty ”podejrzane” o bycie ekstremami funkcji. Na jakich przedziałach funkcje są rosnące, a na jakich malejące?
   (a) $f(x) = x^{100} - 2x$,
   (b) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x}$,
   (c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$,
   (d) $f(x) = x(x + 1)^5$.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

Aby funkcja f miała w punkcie x_0 ekstremum lokalne (tj. minimum lub maksimum na pewnym otoczeniu x_0) to wystarczy aby $f'(x_0) = 0$ oraz $f'(x)$ miała przeciwne znaki po obu stronach punktu x_0 (zobacz rysunek).



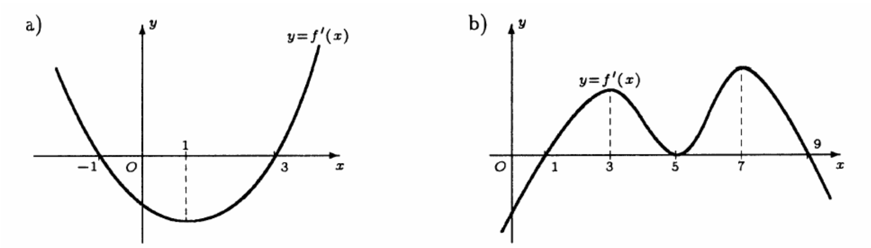
Rys. 6.1.8. Wykres pochodnej funkcji.



Rys. 6.1.9. Wykres funkcji.

(3) Na rysunku na następnej stronie przedstawione są wykresy pochodnych funkcji. Wskaż punkty, w których funkcja na pewno ma ekstremum lokalne. Czy jest to minimum czy maksimum?

(4) Wyznacz punkt podejrzany o bycie ekstremum dla $f(x) = x^3$. Czy tam jest ekstremum lokalne (zrób wykres). Gdzie funkcja jest rosnąca, a gdzie malejąca? Czy to jest sprzeczność z poprzednim warunkiem?



(5) Określ, na których przedziałach funkcja jest rosnąca, a na których malejąca. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji.
   (a) $e^{-x} + e^{x}$,
   (b) $x^3 - 3x^2 + 4$,
   (c) $\frac{x}{x^2+1}$,
   (d) $\frac{\ln(x)}{x}$,
   (e) $x\sqrt{4-x}$,
   (f) $2\sin(x) + \cos^2(x)$.

Maksimum i minimum na przedziale

Istnieje twierdzenie, które mówi, że dowolna funkcja (ciągła) określona na przedziale domkniętym $[a, b]$ osiąga swoje minimum i swoje maksimum. Dlatego jeśli badamy funkcję na przedziale, to jest prosty algorytm jak to minimum i maksimum znaleźć: wystarczy wyznaczyć wartości $f(a), f(b)$ (na końcach) i punkty podejrzane o bycie ekstremum $x_1, x_2, \ldots x_n$ (czyli takie, że $f'(x_j) = 0$). Następnie jako minimum wziąć najmniejszą spośród wartości $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots$ $f(x_n)$ a za maksimum największą. I to wszystko. Od razu są też wyznaczone punkty, gdzie minimum i maksimum jest przyjmowane. **Pamiętaj, żeby zawsze sprawdzić końce przedziału!**

(6) Wyznacz minimum i maksimum funkcji na podanym przedziale.
   (a) $\ln(x) - 3x$ na $[1, e^3]$,
   (b) $\sin(x) - \frac{x}{2}$ na $[0, 2\pi]$,
   (c) $x^3 - 4x^2 + 7x + 1$ na $[-10, 10]$,
   (d) $x^2 - 4 + \ln(x)$ na $[1, 2]$,
   (e) $\frac{9}{x} + \frac{81}{8x^2} + \ln(x)$ na $[4, 5]$ (uwaga: w tym wypadku beż użycia kalkulatora porównanie wartości funkcji na końcach przedziału jest praktycznie niewykonalne - znajdź sprytny sposób!).

(7) Wpisz za $\triangle$ znak $<$ lub $>$ i udowodnij powstałą nierówność.
   (a) $\ln(x+1)\triangle x$ dla $x > 0$,
   (b) $\operatorname{arc\,tg}(x)\triangle x$ dla $x > 0$,
   (c) $\sin \triangle x$ dla $0 < x < 1/10$,
   (d) $\cos(x)\triangle 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$.