Lista 3: Zbiory i podzbiory. Zasada szufladkowa Dirichleta.

klasa II, LO XIV Wrocław

Agnieszka Hejna, Wrocław, 1.10.2019r.

http://math.uni.wroc.pl/~hejna

Na tej liście zadania bardzo łatwe są wymieszane z bardzo trudnymi (celowo). Musisz sobie z tym poradzić!

Zasada szufladkowa Dirichleta

Jeśli mamy $n+1$ przedmiotów i n szuflad, to do pewnej szuflady muszą trafić co najmniej 2 obiekty. Zdanie wydaje się trywialne, ale ma wiele nietrywialnych konsekwencji.

(1) Przecięcia kratek w nieskończonym zeszycie pomalowano na niebiesko lub na czerwono. Udowodnij, że można wybrać prostokąt o wierzchołkach w punktach o tym samym kolorze.

(2) Załóżmy, że $2k > n+1$. Załóżmy, że mamy danych k różnych liczb naturalnych nie większych niż n. Uzasadnij, że da się spośród nich wybrać 3 takie liczby a, b, c, że $a + b = c$.

(3) Na odcinku $[0, 1]$ wybrano 101 punktów. Uzasadnij, że wśród tych punktów są dwa odległe o mniej niż $1/100$.

(4) Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Czy można wybrać 1000 takich, które wzajemnie się nie biją?

(5) Udowodnij, że z nieskończonego ciągu liczb naturalnych można wybrać podciąg niemalejący.

(6) Z każdego podzbioru liczb $\{1, 2, \ldots, N\}$ wybrano najmniejszą liczbę. Obliczyć sumę wybranych liczb.

(7) Pierwszego dnia na obozie matematycznym spotkało się N uczniów (z różnych klas i szkół). Uzasadnij, że jest wśród nich taka dwójka uczniów, że uczniowie Ci mają taką samą liczbę znajomych na tym obozie.

(8) Wybrano 17 liczb całkowitych. Udowodnij, że spośród nich da się wybrać 5 o sumie podzielnej przez 5.

(9) Na turnieju tenisowym spotkało się $2N$ tenisistów. Na ile sposobów mogą się połączyć w pary do pierwszej rundy?

(10) Dany jest ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Udowodnij, że można z niego wybrać pewną liczbę kolejnych liczb (być może jedną) w taki sposób, że ich suma jest podzielna przez n.

(11) W pociągu w przedziale spotkało się 6 osób. Uzasadnij, że wśród nich jest trójka takich, które się parami znają lub trójka takich, którzy się parami nie znają.

(12) W pociągu spotkało się 10 osób. Udowodnij, że wśród nich jest albo czwórka takich, które się parami znają, albo trójka takich, którzy się parami nie znają.

(13) Czy w powyższym liczbę "10" możesz zastąpić liczbą "9"?

(14) Nikt na świecie nie rozwiązał dwóch powyższych zadań dla 5 osób, które się znają lub 5 takich, które się nie znają. Ale wiadomo, że istnieje taka minimalna liczba n osób w pociągu, że wśród nich istnieje 5, które się parami znają lub 5 takich, które się parami nie znają. Podaj możliwe oszacowania na tę wielkość.

(15) Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2018\}$, których suma elementów jest nieparzysta.

(16) Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, których suma elementów jest nieparzysta.

(17) Na ile sposobów można rozstawić na szachownicy $(N \times N)$ N wież, które się nie biją?

(18) Udowodnij, że pośród $n+1$ liczb zawsze znajdą się dwie takie, których różnica jest podzielna przez n.

(19) Na ile sposobów można zapisać zbiór S o N elementach jako sumę 3 rozłącznych zbiorów?

(20) Na ile sposobów można zapisać zbiór S o N elementach jako sumę 2 rozłącznych zbiorów?

(21) Dla każdej pary podzbiorów A, B $\{1, 2, \ldots, N\}$ wyznaczono sumę elementów $A \cap B$. Udowodnić, że suma otrzymanych 4^n liczb wynosi $n4^n$.

(22) Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieje liczba m taka, że zapis dziesiętny nm składa się tylko z zer i jedynek.