

Prosta rzeczywista – składa się z liczb rzeczywistych.

Płaszczyzna – zbiór punktów, każdy opisany przez parę liczb rzeczywistych (współrzędnych). Każdy punkt można więc utożsamić z parą liczb rzeczywistych (x_1, x_2) .

Przestrzeń (trójwymiarowa) – zbiór punktów opisanych trzema współrzędnymi (czyli punkt to trójka liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3)).

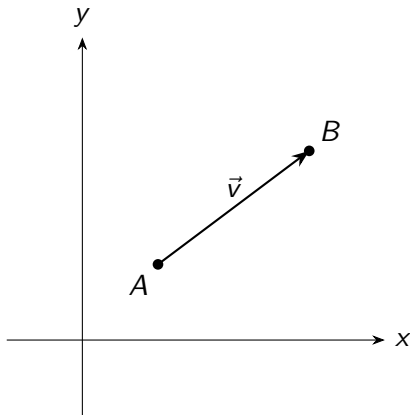
Standardowa n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa – zbiór ciągów długości n złożonych z liczb rzeczywistych; oznaczona $\mathbb{R}^n$.

W skrócie powiemy po prostu: przestrzeń n -wymiarowa.

Element przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy *punktem*.

(Pierwsze przykłady będą w $\mathbb{R}^2$ – część jest znana ze szkoły średniej).

Wektor (geometryczny) – uporządkowana para punktów A, B . Myślimy o wektorze jako odcinku łączącym A i B , rozpoczynającym się w A i kończącym w B .

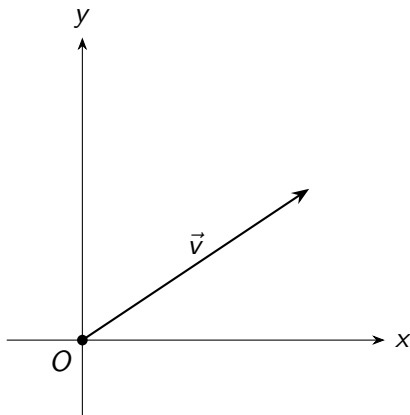


Elementy algebry liniowej

Szczególny, „domyślny” przypadek: wektor rozpoczynający się w $O = (0, 0)$ – początku układu współrzędnych. Wektor taki jest wyznaczony przez swój końcowy punkt.

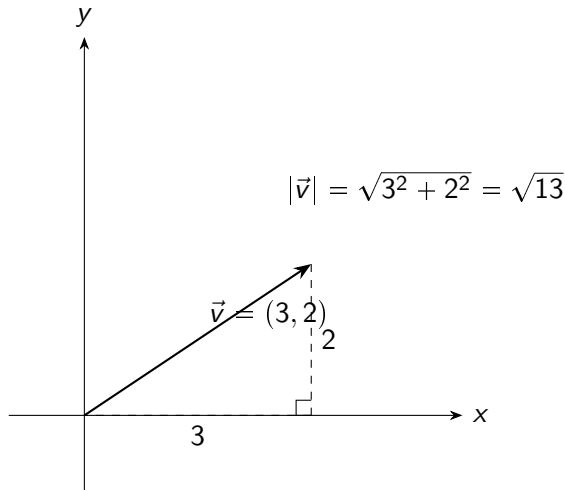
Jednocześnie, każdy punkt wyznacza wektor zaczynający się w O i kończący w tym punkcie.

To pozwala na utożsamienie punktu z wektorem (o początku w O).



Definiujemy długość wektora $\vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$|\vec{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$



Wektory można dodawać: dla

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

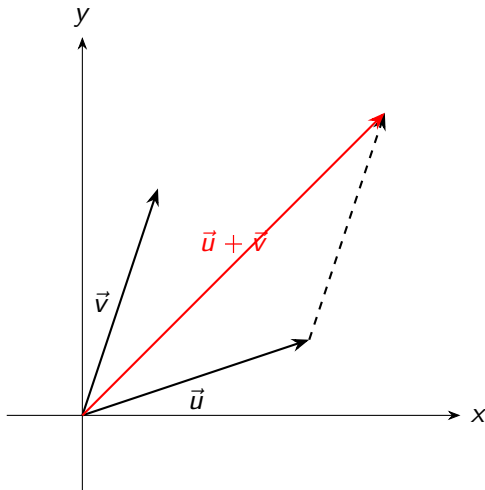
oraz

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

definiujemy sumę:

$$\vec{u} + \vec{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Geometrycznie: przykładanie wektorów.



Elementy algebry liniowej

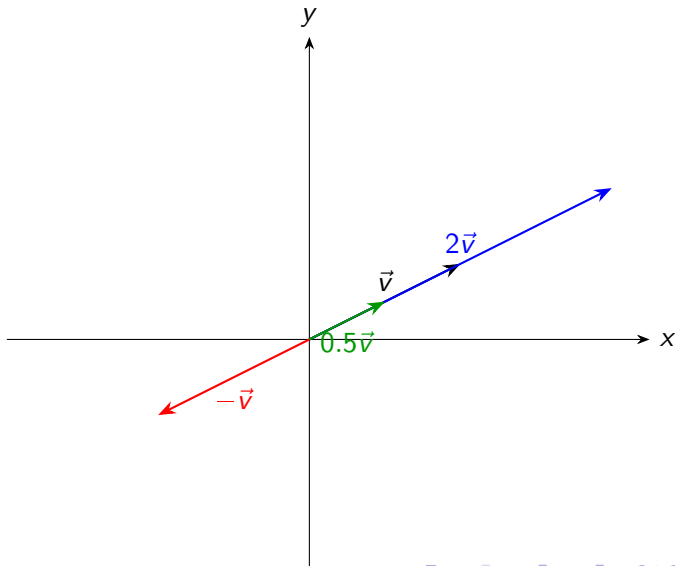
Mnożenie wektorów przez skalary:

Niech $\vec{v} = (v_1, v_2)$ będzie wektorem, zaś a liczbą rzeczywistą (nie wektorem!). Wtedy definiujemy iloczyn:

$$a \cdot \vec{v} := (av_1, av_2),$$

(gdzie av_1 i av_2 to zwykłe iloczyny liczb).

Geometrycznie: przeskalowanie, czyli wydłużenie/skrócenie i ewentualne odbicie wektora (względem O).



Mnożenie wektorów przez skalary i dodawanie wektorów spełniają zależności podobne, jak mnożenie i dodawanie liczb rzeczywistych:

- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$
- Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

- Wektor $(-1) \cdot \vec{v}$ jest przeciwny do $\vec{v}$, tzn. $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Oznaczamy ten wektor przez $-\vec{v}$ (wektor $\vec{v}$ nie ma innych przeciwnych wektorów).
- Wektory możemy odejmować poprzez dodawanie wektora przeciwnego:

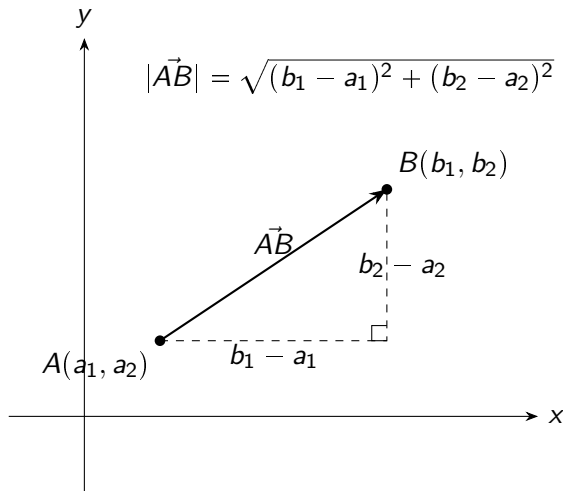
$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Niech $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$.

Wtedy $\vec{AB} := B - A$ to wektor taki, że

$$A + \vec{AB} = B.$$

To pozwala na zdefiniowanie odległości między A i B jako długości $\vec{AB}$.



Wszystkie definicje przenoszą się na przestrzeń o dowolnie wielu wymiarach. Dla

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

gdzie $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, oraz dla $a \in \mathbb{R}$ mamy:

- $\vec{u} + \vec{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n),$
- $a \cdot \vec{v} := (av_1, av_2, \dots, av_n),$
- $|\vec{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$

Długość wektora pozwala na zdefiniowanie odległości między punktami jak w $\mathbb{R}^2$.

Dla $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ w $\mathbb{R}^3$: odległość między A i B to

$$|\vec{AB}| = |B - A| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Geometria:

- Na płaszczyźnie: punkty, proste.
- W przestrzeni 3D: punkty, proste, płaszczyzny.

Punkty i proste na płaszczyźnie to „kopie” przestrzeni zero- i jednowymiarowej („zanurzone” w tej płaszczyźnie).

W przestrzeni trójwymiarowej podobnie „zanurzone” są kopie przestrzeni zero- jedno- i dwuwymiarowej.

Podobnie przestrzeni n -wymiarowej można zanurzyć kopie przestrzeni niższych wymiarów. Szczególne nazewnictwo (poprzedni wykład): kopia przestrzeni $(n - 1)$ -wymiarowej to *hiperpłaszczyzna*.

Inne geometryczne konstrukcje, np. zbiór punktów w równej odległości od wybranego punktu (w dwóch wymiarach: okrąg; w trzech: sfera; w dowolnym n : *hipersfera* lub *n-sfera*).

Przypomnienie: *funkcja* (lub *przekształcenie*) ze zbioru X w zbiór Y to jednoznaczne przyporządkowanie każdemu elementowi x elementu zbioru Y . Zapisujemy:

$$f: X \rightarrow Y.$$

(X nazywa się *dziedziną* funkcji, a Y *przeciwdziedziną*.)

Dla $x \in X$, zapis $f(x)$ oznacza element zbioru Y przypisany elementowi x (zwany *obrazem* x przez f).

(Np. dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, obrazem 2 jest 4).

Przestrzenie euklidesowe (a ogólniej: tak zwane *przestrzenie liniowe*) bada się poprzez przekształcenie liniowe.

Niech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wtedy f jest *liniowa*, gdy dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$ i $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\begin{aligned} f(a \cdot \vec{v}) &= a \cdot f(\vec{v}) && \text{(jednorodność),} \\ f(\vec{u} + \vec{v}) &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) && \text{(addytywność).} \end{aligned}$$

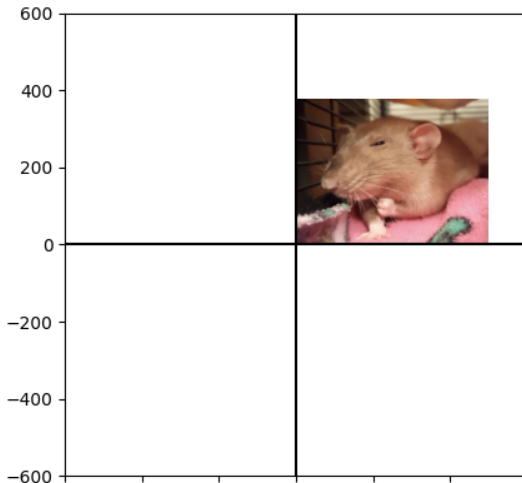
Czyli:

- Obraz przeskalowania to przeskalowanie obrazu (przez ten sam skalar).
- Obraz sumy to suma obrazów.

Przykłady: liniowe przekształcenia płaszczyzny.

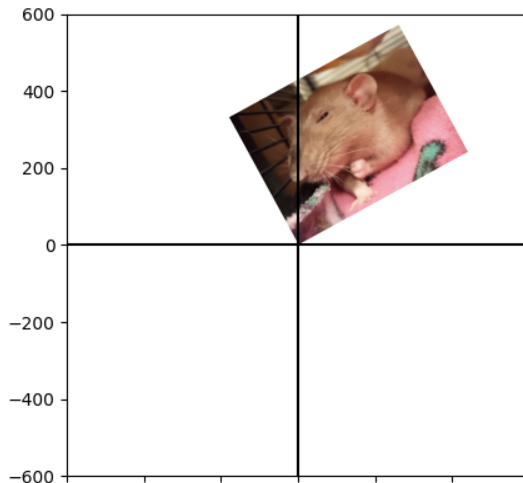
Elementy algebry liniowej

Płaszczyzna z pokolorowanymi punktami, aby było widać ich obrazy.



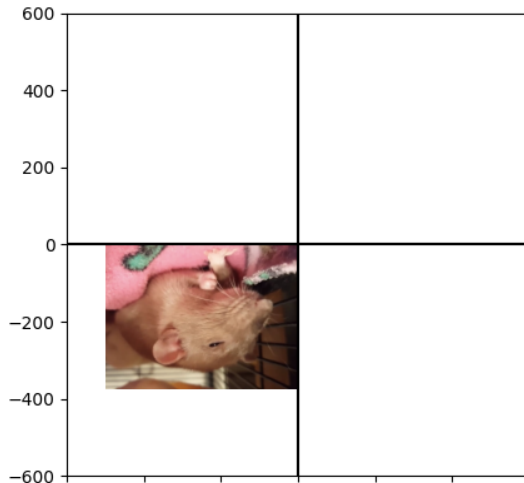
Elementy algebry liniowej

Obrót wokół O .



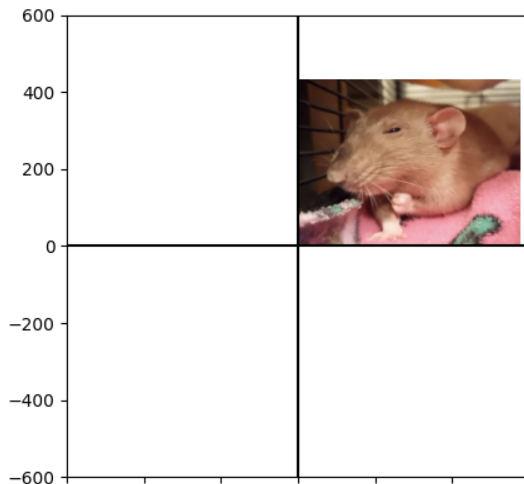
Elementy algebry liniowej

Odbicie względem O .



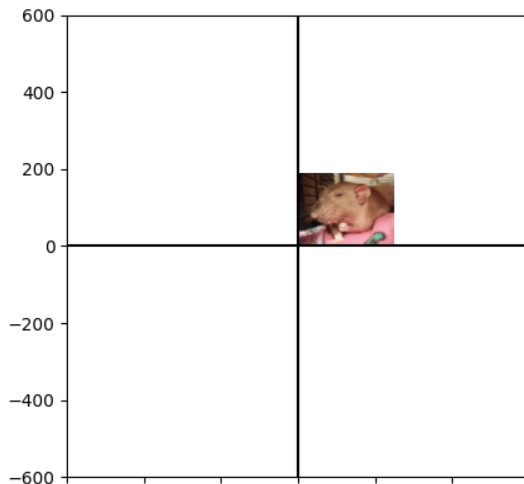
Elementy algebry liniowej

Jednokładność o skali > 1 .



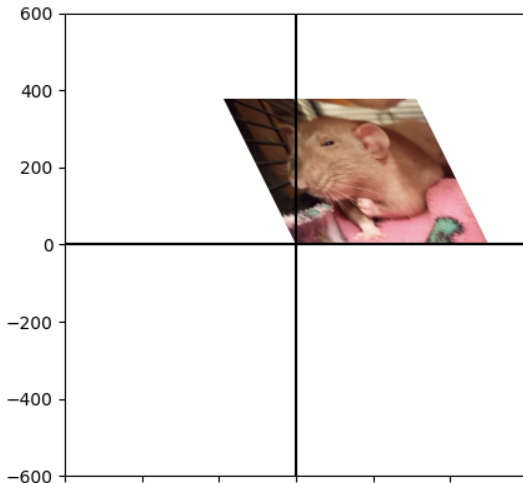
Elementy algebry liniowej

Jednokładność o skali < 1 .



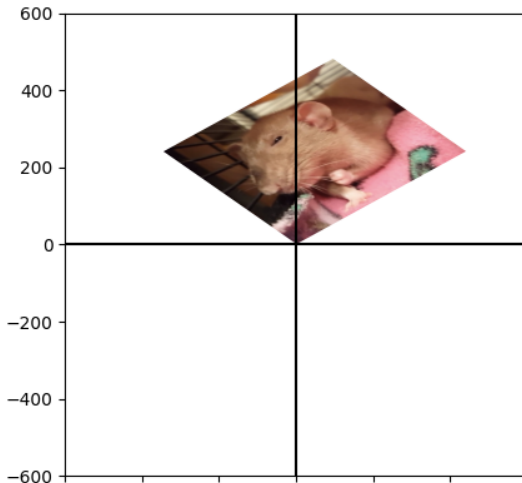
Elementy algebry liniowej

Przekształcenie ścinające.



Elementy algebry liniowej

Ścięcie i obrót.



Ciąg dalszy na wykładzie 4.