Przypomnienie:

[Standardowa euklidesowa] przestrzeń n-wymiarowa: zbiór wszystkich ciągów liczb rzeczywistych długości n (dla $n = 1$: prosta, $n = 2$: płaszczyzna, $n = 3$: przestrzeń 3D). Oznaczenie: $\mathbb{R}^n$. Element przestrzeni: punkt, wektor.

Dozwolone operacje: dodawanie wektora, mnożenie wektora przez liczbę.

Przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ to funkcja spełniająca:

$$f(av) = af(v),$$
$$f(u + v) = f(u) + f(v),$$

dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$ i $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Przekształcenia z płaszczyzny w prostą ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$):

- $f(x, y) = x$.
- $f(x, y) = x + y$.
- $f(x, y) = x - y$.

Przekształcenia z prostej w płaszczyznę ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$):

- $f(x) = (x, 0) \quad (= x \cdot (1, 0))$.
- $f(x) = (x, x) \quad (= x \cdot (1, 1))$.
- $f(x) = (2x, -x) \quad (= x \cdot (2, -1))$.

Pozostałe przykłady – `linear.ipynb`.

Macierze

Od teraz wektory piszemy „pionowo”, np. $\vec{v} = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Macierz – układ (tablica) $n \times m$ liczb (*współczynników*), gdzie n to liczba wierszy i m to liczba kolumn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Współczynniki macierzy oznaczamy $a_{i,j}$: i, j to (odpowiednio) numer wiersza i kolumny.

Macierze

Macierzy A rozmiaru $n \times m$ odpowiada przekształcenie liniowe $f_A \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ zadane następująco:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \ldots + a_{1,m}v_m \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \ldots + a_{2,m}v_m \\ \vdots \\ a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \ldots + a_{n,m}v_m \end{pmatrix}.$$

Fakt: każde przekształcenie liniowe jest takiej postaci, tzn. jeśli $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe, wtedy istnieje (jedyna) macierz A rozmiaru $n \times m$ taka, że $f = f_A$.

Macierze

Przykłady macierzy dla wybranych przekształceń $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

- Jednokładność o skali a:
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}.$$
- Odbicie względem osi OY:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$
- Rzut prostopadły na oś OX:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Obrót o kąt α wokół początku układu:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Iloczyn macierzy. Niech A będzie macierzą rozmiaru $n \times m$, a B macierzą rozmiaru $m \times k$. Wtedy definiujemy iloczyn A i B jako macierz C rozmiaru $n \times k$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,k} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{n,k} \end{pmatrix},$$

gdzie $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,1}b_{1,j} + \ldots + a_{i,m}b_{m,j}$.

Równoważnie: gdy $B = (V_1, \ldots V_k)$, gdzie V_i to kolumny, to

$$A \cdot B = (AV_1, \ldots, AV_k),$$

gdzie AV_i to iloczyn A z wektorem (kolumną) V_i.

Składanie przekształceń [liniowych]. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oraz $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ będą funkcjami (przekształceniami):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, dashed, "g\circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Wtedy możemy rozważyć nowe przekształcenie z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^k$, gdzie wektor $v \in \mathbb{R}^n$ przenosimy na $f(v) \in \mathbb{R}^m$, a następnie uzyskany punkt przenosimy na $g(f(v)) \in \mathbb{R}^k$.

$$v \overset{f}{\mapsto} f(v) \overset{g}{\mapsto} g(f(v)).$$

Takie oznaczenie nazywamy *złożeniem* f i g i oznaczamy $g \circ f$.

Fakt: jeśli f i g są liniowe, to ich złożenie $g \circ f$ też.

Macierze

Składanie przekształceń liniowych $\leftrightarrow$ mnożenie macierzy:

Niech

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy B,
- $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy A,
- $h = g \circ f$ będzie ich złożeniem.

Skoro przekształcenia f i g są liniowe, przekształcenie h też jest liniowe i jest wyznaczone przez macierz C. Mamy:

Fakt: $C = AB$.

Zatem składanie przekształceń odpowiada mnożeniu ich macierzy!