zadanie 1 (5 pkt):

Udowodnij, że funkcja kwantylowa:

$$F^{-1}(p) = min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant p\}, \quad p \in (0,1)$$

posiada następujące własności

1. $F^{-1}(p)$ jest niemalejąca;
2. $F^{-1}(F(x)) \leqslant x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $0 < F(x) < 1$;
3. $F(F^{-1}(p)) \geqslant p$ dla każdego $p \in (0,1)$;
4. $F^{-1}(p^-) = F^{-1}(p)$ dla $p \in (0,1)$ (F^{-1} jest lewostronnie ciągła);
5. $F^{-1}(p^+) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > p\}$ dla $p \in (0,1)$ (F^{-1} posiada prawostronną granicę);

zadanie 2 (8 pkt):

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \frac{7}{x^8} 1_{[1,\infty)}(x).$$

(a) Wyznacz rozkład (dystrybuantę i gęstość) $X_{1:n}$.
(b) Wyznacz rozkład (dystrybuantę i gęstość) $X_{n:n}$.
(c) Oblicz $EX_{1:n}$ oraz narysuj jako funkcję zmiennej n.
(d) Oblicz $EX_{n:n}$ oraz narysuj jako funkcję zmiennej n..
(e) Wyznacz kwantyl rzędu p dla zmiennej losowej $X_{1:n}$. Zapisz obliczony kwantyl $X_{1:n}$ w języku odpowiedniego kwantyla rozkładu zmiennej losowej X_1.
(f) Narysuj wykres kwantyli $X_{1:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ w programie R.
(g) Wyznacz kwantyl rzędu p dla zmiennej losowej $X_{n:n}$. Zapisz obliczony kwantyl $X_{n:n}$ w języku odpowiedniego kwantyla rozkładu zmiennej losowej X_1.
(h) Narysuj wykres kwantyli $X_{n:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ w programie R.

zadanie 3 (10pkt):

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x), \ \lambda > 0.$$

(a) Wyznacz rozkład (dystrybuantę i gęstość) $X_{2:n}$.
(b) Wyznacz rozkład (dystrybuantę i gęstość) $X_{n-1:n}$.
(c) Oblicz $EX_{2:n}$.
(d) Oblicz $EX_{n-1:n}$.
(e) Dla $n = 2$ narysuj wykres kwantyli $X_{2:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ w programie R.
(f) Dla $n = 2$ narysuj wykres kwantyli $X_{n-1:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ w programie R.
(g) (3 pkt) Narysuj wykres kwantyli $X_{2:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ oraz wybranego $n \geqslant 3$ w programie R.
(h) Narysuj wykres kwantyli $X_{n-1:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ oraz wybranego $n \geqslant 3$ w programie R.

zadanie 4 (10pkt):

Niech X będzie zmienna losową o rozkładzie jednostajnym o gęstości

$$f_X(x) = 1_{(0,1)}(x)$$

(a) Wyznacz rozkład (dystrybuantę i gęstość) $X_{3:n}$.
(b) Wyznacz rozkład (dystrybuantę i gęstość) $X_{n-2:n}$.
(c) Oblicz $EX_{3:n}$.
(d) Oblicz $EX_{n-2:n}$.
(e) Dla $n = 3$ narysuj wykres kwantyli $X_{3:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ w programie R.
(f) Dla $n = 3$ narysuj wykres kwantyli $X_{n-2:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ w programie R.
(g) (3 pkt) Narysuj wykres kwantyli $X_{3:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ oraz wybranego $n \geqslant 4$ w programie R.
(h) Narysuj wykres kwantyli $X_{n-2:n}$ rzędu $p = 0.001k$ dla $k = 1, 2, \cdots, 1000$ oraz wybranego $n \geqslant 4$ w programie R.

Barbara Jasiulis-Gołdyn
Powodzenia:)