Zadania i problemy do wykładu *Statystyka* (Zestaw nr 1)

Zadania

Zadanie 1. Rozpatrzmy doświadczenie polegające na niezależnych rzutach dwiema monetami. Dla jednej z nich $P(\{\text{orzeł}\}) = u$ natomiast dla drugiej $P(\{\text{orzeł}\}) = w$. Oznaczmy odpowiednio przez

1. $p_0 = P(\{\text{wypadło zero orłów}\})$,
2. $p_1 = P(\{\text{wypadł jeden orzeł}\})$,
3. $p_2 = P(\{\text{wypadły dwa orły}\})$.

Czy można tak dobrać wartości w i u aby $p_0 = p_1 = p_2$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy funkcję rzeczywistą n zmiennych posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe. doświadczenie polegające na niezależnych rzutach dwiema monetami.

1. Ile pochodnych cząstkowych rzędu trzy ma funkcja dwóch zmiennych?
2. Ile pochodnych cząstkowych rzędu cztery ma funkcja trzech zmiennych?
3. Ile pochodnych cząstkowych rzędu r ma funkcja n zmiennych?

Zadanie 3. W sposób losowy rozmieszczono n kul do n urn, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że

1. wszystkie urny będą zajęte,
2. dokładnie jedna urna pozostanie pusta,
3. co najmniej dwie urny będą puste.

Zadanie 4. Załóżmy, że 5% mężczyzn oraz $0,25\%$ kobiet nie rozróżnia kolorów. Z populacji, w której mężczyźni i kobiety występują w tej samej proporcji wybierano losowo osoba, która okazała się nie rozróżniać kolorów.

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tą osoba jest mężczyzna?
2. Jak zmieni się to prawdopodobieństwo gdy w populacji, z której losujemy osobę proporcja kobiet do mężczyzn jest, jak $2:1$?

Zadanie 5. Sprawdź czy następujące funkcje są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa.

1. $\exp(-\exp(-x)), \quad x \in (-\infty, \infty)$,
2. $1 - \exp(-x), \quad x \in (0, \infty)$,
3. dla ustalonego $p \in [0,1]$, niech $F(x) = 0$, dla $x \leqslant 0$, oraz $F(x) = \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} p$, dla $x \in [k, k+1)$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Zadanie 6. Pewna rzeka wylewa każdego roku. Załóżmy, ze najniższy poziom wody w tej rzece jest oznaczony przez 1 natomiast najwyższy poziom jest oznaczony przez zmienną losowa Y o rozkładzie prawdopodobieństwa z dystrybuantą

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad 1 \leqslant y < \infty.$$

1. Sprawdź, że $F_Y(y)$ jest dystrybuantą,
2. podaj postać gęstości prawdopodobieństwa odpowiadająca dystrybuancie $F_Y(y)$.
3. Jeśli znak najniższego poziomu wody zostanie oznaczony przez 0 a nowa jednostką w jakiej mierzymy poziom wody jest równa $\frac{1}{10}$ poprzedniej jednostki, to najwyższy poziom wody jest równy $Z = 10(Y - 1)$. Znajdź $F_Z(z)$ oraz $f_Z(z)$.

Zadanie 7. *Medianą* rozkładu zmiennej losowej X jest liczba m, dla której

$$P(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Znajdź mediany zmiennych losowych o rozkładach prawdopodobieństwa z gęstością

1. $f(x) = 3x^2, \quad x \in (0, 1)$,
2. $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}, \quad x \in (-\infty, \infty)$.

Zadanie 8. Pewna para małżeńska postanowiła mieć kolejne dzieci tak długo, aż urodzi im się córka. Jaka jest oczekiwana liczba dzieci dla tej pary?

Problemy

Problem 0. Narysuj wykres dystrybuanty lub gęstości swojego ulubionego rozkładu prawdopodobieństwa, podaj wartości jego charakterystyk oraz powód, dla którego lubisz ten rozkład.

Problem 1. Niech X i Y będą dwoma zmiennymi losowymi. Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$X \wedge Y = \min(X, Y) \quad \text{oraz} \quad X \vee Y = \max(X, Y).$$

Wykaż, że

$$\mathrm{E}(X \vee Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y - \mathrm{E}(X \wedge Y).$$

Problem 3. Wykaż, że dla ciągłej zmiennej losowej X zachodzi równość

$$\min_a \mathrm{E}|X - a| = \mathrm{E}|X - m|,$$

gdzie m jest medianą zmiennej losowej X.

Problem 4. Wykaż, że

$$\frac{d}{da}\,\mathrm{E}(X - a)^2 = 0, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy,} \quad \mathrm{E}X = a.$$

Wypisz niezbędne założenia na F_X i f_X.

Krzysztof Topolski