Zadania i problemy do wykładu *Statystyka*

(Zestaw nr 2)

Zadania

Zadanie 1. Załóżmy, że 1% ludzi nie rozróżnia kolorów. Jaka duża musi być próba aby z prawdopodobieństwem większym niż 0.95 zawierał ona osobę nierozróżniającą kolory? Zakładamy, że populacja z której wybieramy próbę jest tak duża iż możemy założyć, że dokonujemy losowania bez zwracania.

Zadanie 2. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową z populacji o rozkładzie z dystrybuantą F_X. Definiujemy zmienne losowe $Y_1, ..., Y_n$ w następujący sposób

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad X_i > \mu \\ 0, & \text{gdy} \quad X_i \leqslant \mu, \end{cases}$$

Znajdź rozkład statystyki $T(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Zadanie 3. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową z populacji o rozkładzie z dystrybuantą F_X. Definiujemy statystyki M i m odpowiednio jako

$$M(X_1, ..., X_n) = \max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right), \quad m(X_1, ..., X_n) = \min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right).$$

Znajdź rozkłady statystyki $M(X_1, ..., X_n)$ oraz $m(X_1, ..., X_n)$.

Zadanie 4. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach o gęstości odpowiednio $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Jaką postać ma rozkład zmiennej losowej Z gdy

1. $Z = X - Y$,
2. $Z = XY$,
3. $Z = X/Y$.

Zadanie 5. Niech U_i, $i = 1, 2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$, a zmienna losowa X ma rozkład

$$P(X = k) = \frac{c}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

gdzie $c = 1/(e - 1)$. Policz rozkład zmiennej losowej

$$Z = \min(U_1, U_2, ..., U_X).$$

Zadanie 6. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową z populacji o rozkładzie Bernoulliego z parametrem p. Wykaż, że rozkład zmiennej losowej X_1 należy do rodziny rozkładów wykładniczych. Rozpatrzmy statystykę

$$T(X_1, ..., X_n) = X_1 + X_2 + \ ... \ + X_n.$$

Pokaż, że rozkład statystyki T należy do rodziny rozkładów wykładniczych.

Zadanie 7. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową. Zdefiniujmy statystykę $\hat{S}^2$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

gdzie $\bar{X}$ jest średnią z próby. Policz wartość oczekiwaną statystyki $\hat{S}^2$.

Problemy

Problem 1. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową, a $\bar{X}$ i S^2 odpowiednio średnią i wariancją z próby. Wykaż, że

$$S^2 = \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - X_j)^2.$$

Problem 2. Udowodnij następującą równość rekurencyjną dla średniej i wariancji. Niech $\bar{X_n}$ i S_n^2 będą odpowiednio średnią i wariancją z próby $X_1, ..., X_n$ o liczebności n. Załóżmy, że mamy do dyspozycji kolejną obserwację X_{n+1}. Pokaż, że

1. $\bar{X}_{n+1} = \frac{X_{n+1}+n\bar{X}_n}{n+1}$,
2. $S_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + \frac{n}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2$.

Problem 3. Udowodnij następujący lemat z wykładu

Lemat. *Niech* $X_1, ..., X_n$ *będzie próba losową, a* $g(x)$ *funkcją, dla której* $\mathrm{E}\, g(X_1)$ *oraz* $\mathrm{Var}\, g(X_1)$ *istnieją. Wtedy*

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right) = n(\mathrm{E}\, g(X_1)),$$

oraz

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right) = n(\mathrm{Var}\, g(X_1)).$$

Krzysztof Topolski